

## FK 型発注システムによる定期発注システムの統一的考察

後 藤 正 幸\*, 内 園 みどり\*\*, 俵 信 彦\*\*

本研究は、在庫量変動と発注量変動を制御する定期発注システムに対して、新しい発注方式を提案し、従来システムと併せて統一的に考察する。まず、在庫量のみフィードバック制御システムとして F 型定期発注システムを構成し、需要系列の自己相関が強くない場合には、G 型定期発注システムと同等の制御が可能であることを示す。一方、需要予測精度が高い場合には、需要予測の情報もフィードバックする G 型の方が制御性能が優れることを示す。以上より、需要予測精度が高い場合にはその情報を強くフィードバックする方式が有効と考えられ、これを実現する FK 型定期発注システムを提案する。FK 型は、 $\gamma$  型、G 型、F 型をすべて包含しており、制御パラメータ  $F$ 、 $K$  の空間上に制約を考えることで、これらのシステムを統一的に議論することが可能である。制御性能の面でも、FK 型は両分散を小さく制御することができる。

## A Study of the FK-Type and the Conventional Periodic Ordering Systems

Masayuki GOTOH,\* Midori UCHIZONO\*\* and Nobuhiko TAWARA\*\*

In the present paper production and inventory systems are discussed based on the conventional methods, i.e. the  $\gamma$ -type and the G-type periodic ordering systems. This paper proposes the FK-type periodic ordering system and discusses the relation among  $\gamma$ -type, G-type, and K-type of ordering systems. The FK-type ordering system has two parameters,  $F$  and  $K$  which are the feedback gain of the inventory level and the predictive demand respectively. We show that the FK-type ordering system includes the  $\gamma$ -type and the G-type ordering systems.

## 1. はじめに

単一品目を扱う定期発注システム〔1〕において、在庫量変動を制御し、かつ発注量変動をも制御することの重要性はすでに指摘されており〔2〕～〔12〕、これら両変動を制御するシステムとして、十代田の  $\gamma$  型定期発注システム〔2〕、平川の H 型および Z 型定期発注システム〔4〕、〔5〕、俵の G 型定期発注システム〔10〕、〔11〕などの方式が提案されている。両分散を制御する目的は、発注量変動を小さくすることで工程の安定化を達成し、在庫量変動を小さくすることで安全在庫量を低減することにある。

両分散を制御する発注システムは、離散型の確率的制御問題として定式化できる。すなわち、在庫システムを離散型の状態空間で表現し〔1〕、在庫量分散と発注量分散の重み付け和を特定の基準にしたがって最小化し、発注量が求められる。

これまでの方式は需要予測方式(指数平滑法など)との併用を前提とし、需要予測量をもとに発注量を算出する方法といえる。つまり、制御結果は併用する予測方式に依存することになる。また、指数平滑法と併用する場合、予測誤差を最小にする平滑化定数が、制御のためには必ずしも有効とはならない。したがって、平滑化定数も制御パラメータと考え、両変動の制御のために最適な平滑化定数を決定することも行われている〔11〕。この場合、需要予測誤差は最小ではないので、需要予測が精度の良い予測をしたいという本来の目的を果たしておらず、制御パラメータも 2 つに増やしてしまう。

最近、在庫モデルと需要モデルが与えられれば、これは最適制御問題に帰着するという考えから、最適レギュレータの理論を定期発注システムに適用し、在庫量変動と発注量変動をバランスよく制御する試みがなされている〔12〕。この方式では、需要系列が自己相関を持つ有色系列の場合、単一工程の場合でもベクトル表現を利用しなければならない。これは、在庫モデルと需要予測モデルを同時にベクトル表現するためである。

本研究ではまず、指数型自己相関を持つ有色ノイズ

\* 早稲田大学(Waseda University)

\*\* 武蔵工業大学(Musashi Institute of Technology)

受付: 1995 年 4 月 5 日, 再受付(3 回)

受理: 1995 年 12 月 4 日

の加わる1変数線形システムに対するフィードバック制御の数式解を導出し、スカラで制御系を扱えるF型定期発注システムを構築する。この方法では、無限級数を用いて簡潔に数式解が導出可能なことが示される。この制御システムを生産-在庫システムへ応用した場合、これは需要予測値を定常期待値として発注量を算出するシステムとなる。その結果、生産-在庫システムにおける需要予測の影響を調べることが可能となる。本発注システムを従来の需要予測を行うG型定期発注システムと比較した場合、需要系列が強い自己相関を持たない場合には、ほぼ同程度の制御が可能であることを示す。これは、従来、制御パラメータと予測パラメータの両方を適切に設定することにより達成できた制御結果を、本システムでは制御パラメータのみの調整で達成できることを示している。一方、需要系列の自己相関が強い場合には、需要予測をもとに制御するシステムの方が有効であり、需要予測が制御性能に与える影響が需要系列によって異なることを示す。このことは、需要予測精度が高い程需要予測の情報を強くフィードバックする制御方式の有効性を示唆する。

以上の流れを踏まえ、本研究ではさらに $\gamma$ 型定期発注システムやG型定期発注システムを包含するシステムとして、需要予測量と在庫量に別々のフィードバックゲイン(制御パラメータ)を持つFK型定期発注システムを提案する。そして需要予測が制御に与える影響とこの制御系の優れた特性を示し、 $\gamma$ 型とG型の幾何学的構造について統一的に考察する。

## 2. モデルの構成

### 2.1 需要モデル

本研究で対象とする需要系列は、平均値 $\mu_D$ 、分散 $\sigma_D^2$ の定義系列とし、かつ指数型自己相関を持つ系列とする。これは1次のARモデルと等価であり、最も基本的かつ現実的な需要モデルである。 $t$ 期の需要量を $D_t$ とし、1期ずらした自己相関係数を $\lambda$ とすると、 $k$ 期ずらした自己相関係数 $\rho(k)$ は、

$$\rho(k) = \frac{\phi_D(k)}{\sigma_D^2} = \lambda^{|k|} \quad (1)$$

である。 $\phi_D(k) = E[(D_t - \mu_D)(D_{t+k} - \mu_D)]$ は $k$ 期ずらした需要の自己共分散である。

### 2.2 定期発注モデル

本研究では、単1品目、単1工程における定期発注システムを対象とする。 $t$ 期の期末在庫量を $I_t$ 、発注量を $O_t$ 、リードタイムを1とすると、 $I_t$ は以下のように入らされる。

$$I_t = I_{t-1} + O_{t-1} - D_t \quad (2)$$

在庫量の期待値は安全在庫量、発注量の期待値は需要量の期待値である。以下では、品切れは起こらず、発注量に制限がないもとの数式解を導出する。品切れに関しては、上記の条件のもとで在庫量分散が与えられてから、品切れ率を考慮して安全在庫量を設定すればよい(以下で示されるように、安全在庫量は両分散には影響しない)。また、発注量に関しては、発注量分散を制御する強さを調節することで、発注量が基準値を上回る確率を調節することができる。

### 2.3 評価関数

本報では、生産-在庫システムの評価尺度として、以下の分散比の和〔2〕～〔12〕を設定する。

$$J = QW(I) + RW(O) \quad (3)$$

ただし、

$$W(I) = \frac{V(I)}{\sigma_D^2} \quad (4)$$

：在庫量分散の需要量分散に対する比

$$W(O) = \frac{V(O)}{\sigma_D^2} \quad (5)$$

：発注量分散の需要量分散に対する比

ただし、 $V(I)$ は在庫量の定常分散、 $V(O)$ は発注量の定常分散である。 $Q$ と $R$ は、どちらを強く制御するかを決定する重み付け係数である。

### 2.4 従来システムの発注量の算出式

在庫量分散のみを最小化する発注量は、

$$O_t = \hat{D}_{t+1/t} - I_t + S \quad (6)$$

である〔1〕。ただし、 $\hat{D}_{t+1/t}$ は $t$ 期における $t+1$ 期の需要予測量であり、在庫量分散の最小値は需要予測量分散となる。これに対し、式(3)のような評価関数を考えた $\gamma$ 型定期発注システムは、以下のように発注量を算出する方式である〔2〕。

$$O_t = \hat{D}_{t+1/t} - \gamma(I_t - S) \quad (7)$$

ただし、 $S$ は安全在庫量である。一方、G型定期発注システムの発注量算出式は、

$$O_t = \mu_D + G\{\hat{D}_{t+1/t} - I_t - \mu_D + S\} \quad (8)$$

である〔10〕、〔11〕。

## 3. 有色雑音を持つ確率システムに対するフィードバック制御とF型定期発注システム

### 3.1 発注システム

本稿では、最適制御理論からの流れを踏まえ、かつ需要予測値を利用しない制御を構築する。そのために、発注量は典型的なフィードバック制御である次式で算出することを考える。

$$O_t = \mu_D - F(I_t - S) \quad (9)$$

ここで、 $S$  は安全在庫量、 $F$  は現在在庫量と安全在庫量の差に乗じて発注量を決定する制御パラメータである。

$x_t = I_t - S$ ,  $u_t = O_t - \mu_D$ ,  $w_t = -D_t + \mu_D$  とおけば、式(2)、(9)は、

$$x_t = x_{t-1} + u_{t-1} + w_t \quad (10)$$

$$u_t = -Fx_t \quad (11)$$

となり、指数型自己相関を持つノイズ  $w_t$  が存在する場合の確率的離散制御問題に帰着する。

$$E[w_t] = 0, \quad E[w_t w_{t+k}] = \lambda^{|k|} \sigma_w^2 \quad (12)$$

ただし、 $F$  は最適制御理論ではフィードバックゲインと呼ばれるものである。 $\sigma_w^2$  はノイズ  $w_t$  の分散である。

式(9)の発注量算出式は、 $\gamma$ 型定期発注システムにおける需要予測値  $\hat{D}_{t+1/t}$  の部分を需要量期待値で置き換えたものになっている。式(9)では制御パラメータのみを設定すればよく、また無限級数の形での展開を可能とする。式(9)で従来法と同程度の制御が可能であれば、需要予測を每期行わずに済むので管理しやすい。在庫量と発注量の制御以外の目的で需要予測が必要な場合には、この制御システムとは別に精度の良い需要予測を行えばよいと考えられる。

### 3.2 有色雑音の存在する確率システムのフィードバック制御則の数式解の導出

ここでは、一般的に次のような指数型自己相関を持つノイズ  $w_t$  が存在する場合の確率的離散最適制御問題について、評価関数の数式解を導出する。

制御対象システム：

$$x_t = Ax_{t-1} + Bu_{t-1} + w_t \quad (13)$$

制御則：

$$u_t = -Fx_t \quad (14)$$

評価関数：

$$J = E \left[ Q \frac{x_t^2}{\sigma_w^2} + R \frac{u_t^2}{\sigma_w^2} \right] \quad (15)$$

ただし、 $x_t$  は状態量、 $u_t$  は制御入力量、 $F$  はフィードバックゲインであり、 $w_t$  は式(12)をみたす雑音で、その定常分散を  $\sigma_w^2$  とする。 $A, B$  はシステムパラメータで  $A > 0, B \neq 0$  とする。また、 $Q$  と  $R$  は正の重みである。このとき、式(15)の評価関数について、以下の定理が成り立つ。

#### 【定理 1】

式(13)のシステムを式(14)のフィードバック制御則で制御するとき、漸近安定条件  $|A - BF| < 1$  を仮定すれば、式(15)の評価関数はフィードバックゲイン  $F$  の関数として、次式で表される。

$$J = \frac{(Q + RF^2)\{1 + (A - BF)\lambda\}}{\{1 - (A - BF)^2\}\{1 - (A - BF)\lambda\}} \quad (16)$$

ただし、 $\lambda$  は  $w_t$  の 1 期ずらした自己相関係数である。また、 $x_t$  と  $u_t$  の定常分布の分散  $V(x_t), V(u_t)$  はそれぞれ、

$$V(x_t) = \frac{\{1 + (A - BF)\lambda\}}{\{1 - (A - BF)^2\}\{1 - (A - BF)\lambda\}} \sigma_w^2 \quad (17)$$

$$V(u_t) = \frac{F^2\{1 + (A - BF)\lambda\}}{\{1 - (A - BF)^2\}\{1 - (A - BF)\lambda\}} \sigma_w^2 \quad (18)$$

で与えられる。

(証明)

本制御システムでは、予測パラメータを含まないため、無限級数の形で定常分布の分散を求めることができる。

まず、 $x_t$  の定常分布を求める。式(14)を式(13)に代入することにより、

$$\begin{aligned} x_t &= (A - BF)x_{t-1} + w_t \\ &= w_t + (A - BF)w_{t-1} + (A - BF)^2 w_{t-2} \\ &\quad + (A - BF)^3 w_{t-3} + (A - BF)^4 w_{t-4} + \dots \end{aligned} \quad (19)$$

と展開される。

$$E[w_t] = 0, \quad E[w_t^2] = \sigma_w^2 \quad (20)$$

を考えれば、

$$\mu_x = E[x_t] = 0 \quad (21)$$

となる。問題は  $x_t$  の分散であるが、確率変数  $x_1, x_2$  に対して、 $y = x_1 + x_2$  の分散が

$$E[y^2] = E[x_1^2] + E[x_2^2] + 2E[x_1 x_2] \quad (22)$$

となることを利用すれば、式(12)とから、

$$\begin{aligned} V(x_t) &= \\ &= \{1 + (A - BF)^2 + (A - BF)^4 \\ &\quad + (A - BF)^6 + (A - BF)^8 + \dots\} \sigma_w^2 \\ &\quad + 2\{(A - BF) + (A - BF)^3 + (A - BF)^5 \\ &\quad + (A - BF)^7 + (A - BF)^9 + \dots\} \lambda \sigma_w^2 \\ &\quad + 2\{(A - BF)^2 + (A - BF)^4 + (A - BF)^6 \\ &\quad + (A - BF)^8 + (A - BF)^{10} + \dots\} \lambda^2 \sigma_w^2 \\ &\quad + 2\{(A - BF)^3 + (A - BF)^5 + (A - BF)^7 \\ &\quad + (A - BF)^9 + (A - BF)^{11} + \dots\} \lambda^3 \sigma_w^2 \\ &\quad + 2\{(A - BF)^4 + (A - BF)^6 + (A - BF)^8 \\ &\quad + (A - BF)^{10} + (A - BF)^{12} + \dots\} \lambda^4 \sigma_w^2 \\ &\quad + \dots \\ &= \frac{1}{1 - (A - BF)^2} \sigma_w^2 + \frac{2(A - BF)\lambda}{1 - (A - BF)^2} \sigma_w^2 \\ &\quad + \frac{2(A - BF)^2 \lambda^2}{1 - (A - BF)^2} \sigma_w^2 + \frac{2(A - BF)^3 \lambda^3}{1 - (A - BF)^2} \sigma_w^2 \\ &\quad + \frac{2(A - BF)^4 \lambda^4}{1 - (A - BF)^2} \sigma_w^2 + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sigma_w^2}{1-(A-BF)^2} \{1+2(A-BF)\lambda \\
 &\quad +2(A-BF)^2\lambda^2+2(A-BF)^3\lambda^3+\dots\} \\
 &= \frac{\{1+(A-BF)\lambda\}}{\{1-(A-BF)^2\}\{1-(A-BF)\lambda\}} \sigma_w^2 \quad (23)
 \end{aligned}$$

評価関数式(15)は,

$$\begin{aligned}
 J &= E[Qx_t^2 + Ru_t^2] \\
 &= E[Qx_t^2 + RF^2x_t^2] \\
 &= (Q + RF^2)V(x_t) \quad (24)
 \end{aligned}$$

となるから、式(23)を代入することにより、定理1は示された。 □

式(16)の数式解において各パラメータが与えられたとき、安定条件の範囲で最小をとるフィードバックゲイン  $F$  を求めれば、それが最適フィードバックゲインとなる。フィードバック制御では、システムは閉ループ形で、

$$x_t = (A - BF)x_{t-1} + w_t \quad (25)$$

とかける。

$\lambda=0$  の場合には、式(16)を最小化する  $F$  を  $F_0$  とすると、式(16)を微分して0とおくことにより  $F_0$  は次のように数式解として得られる。この解が、雑音の白色性を仮定した最適レギュレータの解である[14]。

$$\begin{aligned}
 F_0 &= \\
 &= \frac{-R + A^2R - B^2Q + \sqrt{(R - A^2R - B^2Q)^2 + 4B^2QR}}{2ABR} \quad (26)
 \end{aligned}$$

### 3.3 F型定期発注システム

ここでは、3.2で示した制御則を2の生産-在庫システムに適用し、その数式解を解析する。この定期発注システムをF型定期発注システムと呼ぶ。上記の制御則にしたがい、式(2)で与えられる定期発注システムに対して、式(9)と同様の発注式で発注量を決定する。

$$O_t = \mu_D - F(I_t - S) \quad (27)$$

これは、在庫量の情報だけに制御パラメータをかけてフィードバックする式になっているが、見方を変えれば、需要予測値を定常期待値として、発注量を算出する方式といえる。

式(2)の在庫モデルのフィードバック制御の評価関数の数式解(16)において、 $A=1, B=1$  とおけば、式(10)の形になり定期発注モデルと等価になる。このとき、数式解は

$$J = \frac{(Q + RF^2)\{1 + (1 - F)\lambda\}}{F(2 - F)\{1 - (1 - F)\lambda\}} \quad (28)$$

となる。系の安定条件は  $0 < F < 2$  である。

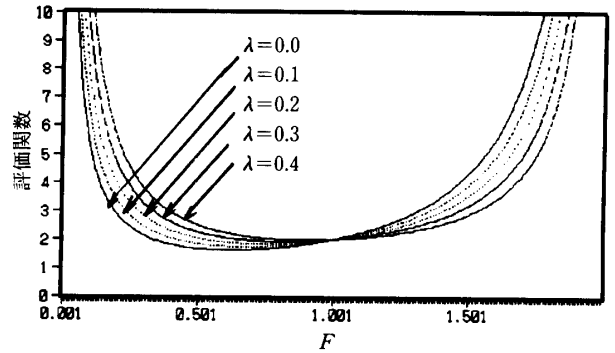


図1  $Q=R=1$  のときの評価関数の推移

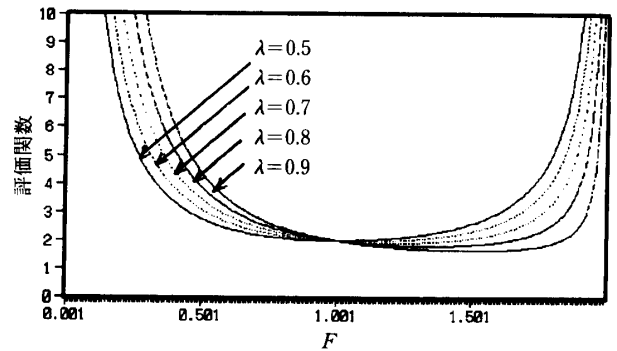


図2  $Q=R=1$  のときの評価関数の推移

表1 最適なパラメータ  $F^*$  の値と各分散比 ( $Q=R=1$  のとき)

$\lambda$	$F^*$	在庫量分散比	発注量分散比	評価関数
0.0	0.618	1.1709	0.4472	1.6180
0.1	0.675	1.1932	0.5437	1.7369
0.2	0.741	1.1890	0.6529	1.8419
0.3	0.817	1.1549	0.7709	1.9257
0.4	0.904	1.0900	0.8907	1.9806
0.5	1.000	1.0000	1.0000	2.0000
0.6	1.104	0.8922	1.0874	1.9796
0.7	1.215	0.7742	1.1428	1.9170
0.8	1.340	0.6471	1.1620	1.8091
0.9	1.500	0.5057	1.1379	1.6437

表2 G型定期発注システムの各分散比 ( $Q=R=1$  のとき)

$\lambda$	G	在庫量分散比	発注量分散比	評価関数
0.0	0.618	1.1709	0.4472	1.6180
0.1	0.620	1.1936	0.5424	1.7360
0.2	0.626	1.1913	0.6476	1.8389
0.3	0.635	1.1614	0.7617	1.9231
0.4	0.649	1.0979	0.8810	1.9789
0.5	0.667	1.0000	1.0000	2.0000
0.6	0.690	0.8641	1.1104	1.9745
0.7	0.719	0.6925	1.1949	1.8874
0.8	0.760	0.4833	1.2362	1.7195
0.9	0.823	0.2454	1.1983	1.4438

### 3.4 評価関数の数値解析

式(28)を最小化する  $F$  の数値解は、解析が複雑になり導出できなかったため、ここでは需要系列の自己相関係数  $\lambda$  を与えたときの評価関数の挙動を数値解析により検討する。評価関数は式(3)で定義した両分散比の和とし、安定条件の範囲で小刻みに  $F$  を与えて数値解より評価関数値を算出し、最適な  $F^*$  を選ぶことにする。

図1、図2に  $Q=R=1$  の場合の評価関数の推移の一例を示す。評価関数は下に凸の形をとり、最適な  $F^*$  が存在することがわかる。また、自己相関が強くなるほど、 $F^*$  が大きくなっていくことがわかる。

一方、表1は  $F^*$  を用いたときの両分散比  $W(I)$ ,  $W(O)$ , および両分散比の和である。

表2に自己相関予測法で予測した場合のG型定期発注システムの両分散比とそれらの和を示す。G型定期発注システムは、評価関数を最小化する予測パラメータと制御パラメータ  $G$  の組み合わせを決定することができるシステムであることから、比較対象として取り上げた。

表1から、自己相関係数  $\lambda$  の変化による両発注システムの特性は同じであることがわかる。また、 $\gamma$  型定期発注システムとG型定期発注システムも、同じ特性を持っており[11]、このことから本制御システムは  $\gamma$  型制御システムの自然な拡張として、その特性を保存しているといえる。

毎期需要予測を行うG型定期発注システムでは、需要系列の自己相関が強い場合により制御結果が得られることがわかる。これに対し、提案法では需要系列の自己相関があまり強くない場合には、G型定期発注システムとほとんど差がない。これは、需要系列の自己相関が強く、予測が精度良く行える場合には、需要予測が有効に働いているが、予測精度が良くない場合には需要予測による効果は少ないという、きわめて自然な結果といえる。このことは、G型定期発注システムが、自己相関の強いところで、在庫量変動を小さく制御できていることからわかる。

以上より、自己相関があまり強くないところでは、需要予測値を定常期待値とするF型定期発注システムでも、予測値をもとに制御を行うG型定期発注システムとほぼ同等の制御が可能であることがわかる。つまり、需要予測は需要系列の自己相関が強い(予測精度が高い)ほど、重要になることがわかる。これは、予測精度が高い場合には予測値を強くフィードバックし、低い場合には弱くフィードバックするような制御系が、よい制御性能を示すことを推測させる。次章では、このような制御系を構築する。

### 4. 需要予測と在庫量それぞれに制御パラメータを持つFK型定期発注システム

本章では、前章の結果を踏まえて、在庫量と需要予測をフィードバックする際に、それぞれ異なる制御パラメータ  $F, K$  をかけて制御を行うFK型定期発注システムを構築し、その制御性能を明らかにし、従来システムの統一的な考察を与える。

G型定期発注システムでは、需要予測と在庫量の差に制御パラメータ  $G$  をかけているが、本システムでは在庫量と需要予測量に、それぞれ制御パラメータ  $F$  と  $K$  をかけて制御することになる。本システムは前章のような状態量のみでのフィードバックでなく、需要予測量を加味した制御則となっており、 $K$  が小さいほど需要予測を軽視することになり、0のとき前章のシステムと一致する。したがって、 $K$  の値によって需要予測の重要性を考察することができる。また、この方式は  $\gamma$  型定期発注システムとG型定期発注システムを包含しており、統一的に考察することができる。

#### 4.1 システムの構成

需要モデルは式(1)とし、本システムでは需要予測は次の1次のARモデルで行うものとする。

$$\hat{D}_{t+1/t} = \mu_D + \lambda(D_t - \mu_D) \quad (29)$$

式(1)で定義した需要モデルに関しては、この予測方式が最も精度の良い予測値を与える。

このとき、式(2)で与えられる定期発注システムにおいて、発注量を次のように決定する。

$$O_t = \mu_D - F(I_t - S) + K(\hat{D}_{t+1/t} - \mu_D) \quad (30)$$

$F, K$  はそれぞれ、在庫量と需要予測量のフィードバックの強さを決定する制御パラメータである。 $F$  のみで制御するF型に対し、FK型は  $K$  を用いて需要予測の情報をフィードバックしようとするシステムである。

#### 4.2 評価関数の数値解の導出

式(3)の評価関数を最小化する  $F$  と  $K$  の組み合わせを求めるため、式(3)を  $F$  と  $K$  の関数として数値解を導出する。

式(2), (29), (30)に  $Z$  変換を施すと、

$$I(Z) = Z^{-1}I(Z) + Z^{-1}O(Z) - D(Z) \quad (31)$$

$$\hat{D}(Z) = \lambda D(Z) \quad (32)$$

$$O(Z) = -FI(Z) + K\hat{D}(Z) \quad (33)$$

となる。これらより、

$$I(Z) = \frac{\lambda K Z^{-1} - 1}{1 - Z^{-1} + FZ^{-1}} D(Z) \quad (34)$$

$$O(Z) = \frac{F + (1 - Z^{-1})\lambda K}{1 - Z^{-1} + FZ^{-1}} D(Z) \quad (35)$$

式(34), (35)より, 在庫量変動, 発注量変動の各パルス伝達関数  $H_1(Z)$ ,  $H_0(Z)$  は,

$$H_1(Z) = \frac{\lambda K Z^{-1} - 1}{1 - Z^{-1} + FZ^{-1}} \quad (36)$$

$$H_0(Z) = \frac{F + (1 - Z^{-1})\lambda K}{1 - Z^{-1} + FZ^{-1}} \quad (37)$$

と与えられ, このパルス伝達関数の極は,  $1 - Z^{-1} + FZ^{-1} = 0$  より,  $Z = 1 - F$  であるので, このシステムの安定条件は,

$$0 < F < 2 \quad (38)$$

である.  $k$  期離れた需要量の自己相関係数  $\rho(k)$  と自己相関関数  $\phi_D(k)$  の関係は式(1)であるので, 需要量のパワースペクトル密度関数  $\Phi_D(Z)$  は,

$$\begin{aligned} \Phi_D(Z) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi_D(k) Z^{-k} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda^{|k|} Z^{-k} \sigma_D^2 \\ &= \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda Z^{-1})^k + \sum_{k=-\infty}^0 (\lambda Z)^{-k} - 1 \right\} \sigma_D^2 \\ &= \left\{ \frac{1}{1 - \lambda Z^{-1}} + \frac{1}{1 - \lambda Z} - 1 \right\} \sigma_D^2 \\ &= \frac{Z(1 - \lambda^2)}{(Z - \lambda)(1 - \lambda Z)} \sigma_D^2 \quad (39) \end{aligned}$$

となる. 発注システムの入力としての需要量に対する出力としての在庫量, 発注量の各パワースペクトル密度関数  $\Phi_I(Z)$ ,  $\Phi_O(Z)$  は式(36), (37)を用いて,

$$\Phi_I(Z) = H_1(Z) H_I(Z^{-1}) \Phi_D(Z) \quad (40)$$

$$\Phi_O(Z) = H_0(Z) H_O(Z^{-1}) \Phi_D(Z) \quad (41)$$

で与えられる. ただし,

$$H_I(Z^{-1}) = \frac{\lambda K Z - 1}{1 - Z + FZ} \quad (42)$$

$$H_O(Z^{-1}) = \frac{F + (1 - Z)\lambda K}{1 - Z + FZ} \quad (43)$$

である.  $\Phi_I(Z)$  と  $\Phi_O(Z)$  が求められたので, これらに逆  $Z$  変換を施すことにより, 在庫量分散  $V(I)$ , 発注量分散  $V(O)$  をそれぞれ求めることができる.

$$\begin{aligned} V(I) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \Phi_I(Z) Z^{-1} dZ \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{\lambda K Z^{-1} - 1}{1 - (1 - F)Z^{-1}} \frac{\lambda K Z - 1}{1 - (1 - F)Z} \\ &\quad \frac{Z(1 - \lambda^2)}{(Z - \lambda)(1 - \lambda Z)} \sigma_D^2 \frac{dZ}{Z} \quad (44) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(O) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \Phi_O(Z) Z^{-1} dZ \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{F + (1 - Z^{-1})\lambda K}{1 - (1 - F)Z^{-1}} \frac{F + (1 - Z)\lambda K}{1 - (1 - F)Z} \\ &\quad \frac{Z(1 - \lambda^2)}{(Z - \lambda)(1 - \lambda Z)} \sigma_D^2 \frac{dZ}{Z} \quad (45) \end{aligned}$$

式(44), (45)の特異点は,  $Z = 1 - F, \lambda$  の2点で, 共

に位数は1である. 以上の式(44), (45)の被積分を留数定理により複素積分すれば, 各分散の数式解が得られる.

まず式(44)の在庫量分散に関して, 各留数は,

$$\begin{aligned} \text{Res}(1 - F) &= \lim_{Z \rightarrow 1 - F} \{Z - (1 - F)\} \Phi_I(Z) Z^{-1} \\ &= \frac{(\lambda K + F - 1)(K\lambda - FK\lambda - 1)(1 - \lambda^2)}{F(2 - F)(1 - F - \lambda)(1 - \lambda + F\lambda)} \sigma_D^2 \quad (46) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Res}(\lambda) &= \lim_{Z \rightarrow \lambda} \{Z - \lambda\} \Phi_I(Z) Z^{-1} \\ &= \frac{\lambda(K - 1)(K\lambda^2 - 1)}{(F + \lambda - 1)(1 - \lambda + F\lambda)} \sigma_D^2 \quad (47) \end{aligned}$$

となるから, これらを用いて,

$$V(I) = \text{Res}(1 - F) + \text{Res}(\lambda) \quad (48)$$

とかける. 一方, 式(45)の発注量分散に関しては,

$$\begin{aligned} \text{Res}(1 - F) &= \lim_{Z \rightarrow 1 - F} \{Z - (1 - F)\} \Phi_O(Z) Z^{-1} \\ &= \frac{F(1 - F - \lambda K)(1 + \lambda K)(1 - \lambda^2)}{(2 - F)(1 - F - \lambda)(1 - \lambda + F\lambda)} \sigma_D^2 \quad (49) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Res}(\lambda) &= \lim_{Z \rightarrow \lambda} \{Z - \lambda\} \Phi_O(Z) Z^{-1} \\ &= \frac{\lambda(F - K + K\lambda)(F + K\lambda - K\lambda^2)}{(F + \lambda - 1)(1 - \lambda + F\lambda)} \sigma_D^2 \quad (50) \end{aligned}$$

となり, これらを用いて,

$$V(O) = \text{Res}(1 - F) + \text{Res}(\lambda) \quad (51)$$

とかける. したがって, 式(4), (5)で定義した各分散比の数式解は,

1) 在庫量分散比の数式解

$$\begin{aligned} W(I) &= \frac{(\lambda K + F - 1)(K\lambda - FK\lambda - 1)(1 - \lambda^2)}{F(2 - F)(1 - F - \lambda)(1 - \lambda + F\lambda)} \quad (52) \end{aligned}$$

2) 発注量分散比の数式解

$$\begin{aligned} W(O) &= \frac{F(1 - F - K\lambda)(1 + K\lambda)(1 - \lambda^2)}{(2 - F)(1 - F - \lambda)(1 - \lambda + F\lambda)} \quad (53) \end{aligned}$$

で与えられ, 評価関数の数式解は, 式(52), (53)を式(3)に代入して与えられる.

$$\begin{aligned} J &= QW(I) + RW(O) \\ &= Q \frac{(\lambda K + F - 1)(K\lambda - FK\lambda - 1)(1 - \lambda^2)}{F(2 - F)(1 - F - \lambda)(1 - \lambda + F\lambda)} \\ &\quad + R \frac{F(1 - F - K\lambda)(1 + K\lambda)(1 - \lambda^2)}{(2 - F)(1 - F - \lambda)(1 - \lambda + F\lambda)} \quad (54) \end{aligned}$$

式(54)において  $K = 0$  とすれば, 式(28)が導かれる.

表3 FK型定期発注システムの各分散比  
( $Q=R=1$  のとき)

$\lambda$	$F$	$K$	在庫量分散比	発注量分散比	評価関数
0.0	0.618	0.000	1.1708	0.4472	1.6180
0.1	0.618	0.064	1.1936	0.5421	1.7357
0.2	0.618	0.134	1.1915	0.6473	1.8388
0.3	0.618	0.209	1.1608	0.7612	1.9220
0.4	0.618	0.292	1.0981	0.8806	1.9787
0.5	0.618	0.382	1.0000	1.0000	2.0000
0.6	0.618	0.481	0.8641	1.1102	1.9743
0.7	0.618	0.591	0.6896	1.1966	1.8861
0.8	0.618	0.712	0.4794	1.2355	1.7148
0.9	0.618	0.848	0.2426	1.1897	1.4323

#### 4.3 数値解析による最適パラメータの算出

本節では、式(54)を最小化する  $F, K$  の組み合わせを求めるために、3.4と同様の数値解析を行う。すべての  $F$  と  $K$  の組み合わせについて調べあげた結果の最適な組み合わせと、両分散の値を以下の表3に示す。

$\lambda=0.0$  のとき  $K=0.0$  となるのは、このとき最適レギュレータ問題に帰着するためである。この場合  $F$  型定期発注システムとも等価になる。

制御結果である分散比の和をみると、先に示した  $G$  型よりも  $FK$  型の方が、評価関数値をより小さく制御できることがわかる。これは少ない発注量(制御入力)のパワーで在庫量変動を小さく制御できていることを示し、 $FK$  型の優れた特性を示している。また、需要の自己相関が強い場合に、 $K$  が  $F$  より相対的に大きくなっている。これは、需要予測精度が高い場合に、予測の情報を強くフィードバックした方がよいことを示している。 $\gamma$  型や  $G$  型は、 $FK$  型においてパラメータのとり方に制限をおいたものと解釈できる。つまり、 $K=0$  とすれば  $F$  型定期発注システム、 $F=\gamma, K=1$  とすれば  $\gamma$  型定期発注システム、 $G=F=K$  とすれば  $G$  型定期発注システムが導かれるので、 $F$  型や  $\gamma$  型、 $G$  型は、 $F$  と  $K$  で作られる空間内の部分集合内で最適なパラメータを探索していることになる。

最適なパラメータ  $F, K$  の組み合わせは、表3より  $K=0, K=1, G=F=K$  とはなっていないので、 $\gamma$  型や  $G$  型の部分集合内にはないといえる。このため、任意のパラメータの組み合わせを実現できる分だけ制御性能を引き出せたものと考えられ、 $FK$  型定期発注システムの有効性が示されたといえる。

#### 5. 各制御システムに関する考察

本稿ではまず、フィードバック制御系の形をそのま

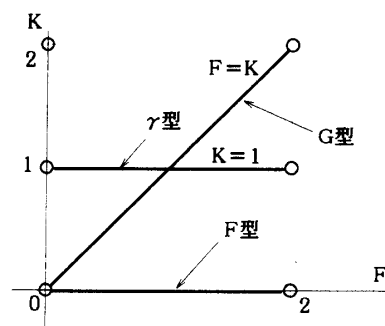


図3 各システムの制御パラメータの関係

ま自然に生産-在庫システムに受け継いだ形の  $F$  型定期発注システムを構成した。この制御系は  $\gamma$  型定期発注システムと類似したシステムであるが、需要予測値を定常期待値とし、在庫量の情報のみをフィードバックする点で異なる。その点で、より管理しやすいシステムといえる。また、この制御系において  $\lambda=0$  とした場合には最適レギュレータ[12]が導かれ、解の導出法は古典的な手法によるものであるが、最適レギュレータの形と類似性がある。また、フィードバック項にパラメータを乗じるという点では、最適レギュレータによる生産-在庫システムも、 $\gamma$  型定期発注システムの拡張になっているといえる。また、在庫量と需要予測値に別々のパラメータ  $F, K$  を乗じる  $FK$  型定期発注システムを提案したが、 $K=0$  とすれば、 $F$  型定期発注システムが導かれる。また、 $F=\gamma, K=1$  とすれば  $\gamma$  型定期発注システム、 $G=F=K$  とすれば  $G$  型定期発注システムが導かれる。この関係を図3に示す。従来法の制御パラメータは図中の線分上が定義域となるのに対し、 $FK$  型は  $0 < F < 2$  の範囲全体が定義域となる。したがって、 $FK$  型はこれらの方式をすべて包含しており、パラメータ  $F, K$  の定義域に制限を加えることで各システムが与えられる。また、線形システムの最適な制御はフィードバック制御の形になることが予想できることから、 $FK$  型定期発注システムは最適な制御系になっていることが推測でき[13]、このことを示すことが今後の課題である。

#### 6. 結論

本稿ではまず、在庫量のみ制御パラメータをかける  $F$  型定期発注システムを構成し、在庫量変動と発注量変動の両変動を制御可能であることを示した。さらに、在庫量と需要予測値それぞれに制御パラメータをかけて制御する  $FK$  型定期発注システムを提案し、従来システムを含めて統一的に考察を行った。

$FK$  型定期発注システムが最適な制御系になっているか、より優れた制御系が存在するかどうかを検討す

ることが今後の課題である〔15〕.

## 参考文献

- 〔1〕 Vassian, H. J.: "Application of Discrete Variable Servo Theory to Inventory Control", *Oper. Res.*, Vol. 3, No. 3, (1955)
- 〔2〕 十代田三知男: "定期発注システムにおける在庫量および発注量の変動に関する研究", 学位論文, 早稲田大学, (1971)
- 〔3〕 大久保敏: "比例制御系の定期発注方式による在庫量変動", 日本経営工学会誌, pp. 220-225, Vol. 26, No. 3, (1975)
- 〔4〕 平川保博: "生産計画規則の決定", 日本経営工学会誌, pp. 343-348, Vol. 26, No. 4, (1976)
- 〔5〕 平川保博, 星野珉二, 片山 博: "二段階生産システムにおける押し引き混成型生産指示方式の特性解析", 日本経営工学会誌, pp. 78-84, Vol. 43, No. 1, (1992)
- 〔6〕 下河宏史, 平川保博: "単一段階生産・在庫システムにおける各種生産指示方式の特性比較", 平成6年度日本経営工学会秋季研究大会予稿集, pp. 231-232, (1994)
- 〔7〕 Najafi, H. and Bennett, H. E.: "Inventory-Production Optimization Using Optimal Control Theory Techniques", *Proc. Annu. Southeast Symp. Syst. Theory*, pp. 12-15, Vol. 6, (1984)
- 〔8〕 片山 博: "移動平均型需要量モデルの直交成分を利用した定期発注システムについて", 日本経営工学会誌, pp. 73-79, Vol. 37, No. 2, (1986)
- 〔9〕 高橋勝彦: "生産指示量と実生産量との差異を調整する生産指示方式の特性解析", 日本経営工学会誌, pp. 81-85, Vol. 37, No. 2, (1986)
- 〔10〕 俵 信彦, 増井忠幸, 鈴木晴久: "Z変換によるG型定期発注方式の解析", 日本経営工学会誌, pp. 275-282, Vol. 41, No. 4, (1990)
- 〔11〕 俵 信彦: "発注量変動と在庫量変動を制御する定期発注システムの研究", 学位論文, 早稲田大学, (1992)
- 〔12〕 田村嘉浩, 俵 信彦: "発注量と在庫量の両変動を制御する生産-在庫システムの研究", 平成6年度日本経営工学会秋季研究大会予稿集, pp. 243-244, (1994)
- 〔13〕 加藤寛一郎: "最適制御入門", 東京大学出版会, (1993)
- 〔14〕 後藤正幸, 平澤茂一, 俵 信彦: "エントロピー最小化によるフィードバック制御の定式化", 第17回情報理論とその応用シンポジウム, pp. 635-638, (1994)
- 〔15〕 後藤正幸, 内園みどり, 俵 信彦: "有色雑音を持つ確率システムのフィードバック制御と生産-在庫システムへの適用", 平成7年度日本経営工学会春季研究大会予稿集, pp. 227-228, (1995)