

## 最適レギュレータに基づく定期発注システムに関する研究

田村 嘉浩\*, 後藤 正幸\*\*, 俵 信彦\*\*\*

顧客の要求に応じるため需要量を予測し、それに応じて発注を行い、製品を生産し、在庫する多段階生産—在庫システムでは、在庫量を制御し、かつ発注量をも制御できる発注システムの研究が重要である。これは発注量変動を制御することにより生産水準の安定化を図り、在庫量変動を制御することにより安全在庫を低く設定できるからである。従来、この問題の発注システムは動的システムの記述法である伝達関数法が用いられてきたが、リードタイムの変化、多段階への拡張を考えると、問題の解法が複雑になる。そこで、拡張性に優れた定式化を行うため最適レギュレータの適用を考えた。本研究では基礎研究として、単1品目、単1工程を対象とし、生産—在庫システムを分散型確率的制御問題としてとらえ、発注量変動を制御し、かつ在庫量変動をも制御する定期発注システムを定式化する。

## A Study on Periodical Ordering System to Control the Variances of Ordering Quantity and Inventory

Yoshihiro TAMURA,\* Masayuki GOTOH\*\* and Nobuhiko TAWARA\*\*\*

The objective of this study is to design a periodic ordering system for multi-stage push-type production and inventory systems, which provides the possible procedure to control both the variances of order quantity and inventory. This system realizes the stable production and low level inventory. The conventional solution is the transfer function method, which is the description method of dynamic system with a single variable. However, this is difficult to be solved in the case which the system is a multi-stage process and the demand is not stationary. In this paper, we propose the new formulation to control production and inventory based on the optimal regulator control theory techniques, that has superior extensivity. From the simulation experiment, we show that the system regulates both variances.

## 1. はじめに

生産—在庫システムにおいては、在庫量変動のみならず、発注量変動をも制御することが重要である。それは在庫量変動を小さく抑えることにより安全在庫を少なく設定でき、他方発注量変動を抑えることにより生産水準の安定化を伴い、前工程の在庫量変動や発注量変動を減らすことが可能だからである。

在庫量変動と発注量変動を制御する定期発注システムとしては、Pinkhamの前期の発注量との差異の分散を費用関数に取り入れて発注量を決定する方式〔1〕、十代田によるVassianの定期発注方式〔2〕のフィードバック項を制御して発注量を決定する $\gamma$ 型定期発注システム〔3〕、俵によるVassianの定期発注システムの発注量そのものに制御パラメータを乗じるG型定期発注システム〔4〕、平川によるリードタ

イムの中の予測誤差変動と需要変動の大きさに着目したZ型定期発注方式〔5〕などが挙げられる。これらの研究では、主に伝達関数法を用いてその最適な発注量を求めており、リードタイムの一般化、種々の需要モデルや多段階工程への拡張などが検討されてきた。

しかし、1入力・1出力の関係を表す伝達関数法は、多変数の取り扱いを必要とする問題の解法としては、変数の数が増すと解析が非常に複雑になる。一方、伝達関数法と同じ制御理論の中では、システムを実時間でとらえた最適制御理論により、最適な制御系を構成し、1変数から多変数システムの制御へと一般化されている。そこで、最適性とこのような多次元生産—在庫システムへの拡張を考えた場合、最適制御理論に基づいて発注システムを定式化することは、今後の解析に対して有益である〔6〕、〔7〕。最適制御理論に基づく定期発注システムの研究は皆無ではないが〔8〕、需要系列を白色雑音と仮定しており、十分な定式化とはなっていない。

本研究では、この方向への基礎的研究として、単1品目、単1工程を対象とし、在庫モデルと需要予測モデルを同時に状態ベクトル表現することにより最適レ

\* 株式会社 菱化システム (Ryoka Systems Inc.)

\*\* 早稲田大学 (Waseda University)

\*\*\* 武蔵工業大学 (Musashi Institute of Technology)

受付: 1995年2月23日, 再受付 (4回)

受理: 1995年12月4日

ギューレータの解法を生産-在庫システムへ適用して、発注量と在庫量の両変動を制御する定期発注システムを定式化する。

## 2. 最適レギュレータとカルマン・フィルタ

次に、本研究で適用する最適レギュレータとカルマン・フィルタについてまとめる。

まず、離散線形システムを次のように定義する。

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{w}(t) \quad (1)$$

ただし、 $\mathbf{x}(t)$  は制御対象の状態を表す状態ベクトル、 $\mathbf{u}(t)$  は制御入力ベクトル、 $\mathbf{w}(t)$  は  $\mathbf{x}(t)$  と同次元の白色雑音ベクトル、 $\mathbf{A}$  と  $\mathbf{B}$  は適当な次元のシステムパラメータ行列とする。  $t=0, 1, 2, \dots$  は時間であり、式(1)で表される系列  $\{\mathbf{x}(t)|t=0, 1, \dots\}$  は離散型確率過程である。制御の目的は、小さい制御入力で、この状態ベクトル  $\mathbf{x}(t)$  を目標ベクトル  $\mathbf{0}$  に近づけることである。定常離散の最適レギュレータとは、この離散線形システムに対し、次の二次形式の評価関数  $J$  を最小化する最適制御則である [6], [7]。

$$J = \lim_{t_n \rightarrow \infty} \frac{1}{t_n} \sum_{t=0}^{t_n} \{ \mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}\mathbf{u}(t) \} \quad (2)$$

$\mathbf{Q}$  は正定値対称の重み行列、 $\mathbf{R}$  は非負定値対称の重み行列とする。  $\mathbf{T}$  は転置ベクトルを表す。

以上の条件下で最適な制御入力  $\mathbf{u}(t)$  は、状態ベクトル  $\mathbf{x}(t)$  を用いて、

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{F}\mathbf{x}(t) \quad (3)$$

$$\mathbf{F} = (\mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{B} + \mathbf{R})^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{A} \quad (4)$$

となる。  $\mathbf{F}$  はフィードバックゲインと呼ばれるものであり、 $\mathbf{P}$  は正定値対称行列で、次式で与えられる。

$$\mathbf{P} = \mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{B}(\mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{B} + \mathbf{R})^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{Q} \quad (5)$$

式(5)はリカッチ方程式と呼ばれ、評価関数値を算出している式である。本研究ではカルマン・フィルタを需要予測に用いるが、カルマン・フィルタも同じ形のリカッチ方程式の解に基づいてフィルタが構成される。これらは、双対問題と呼ばれ、本質的には同じ形の問題を解いていることになる。

カルマン・フィルタは観測雑音が存在することを仮定できる場合に、観測値からその雑音をフィルタリングする方法で、これをもとに予測誤差分散の意味で精度の良い予測値を得ることが可能となる。

システム雑音  $\mathbf{v}_i(t)$  で駆動される確率過程  $\{\mathbf{y}(t)|t=0, 1, \dots\}$  を表現する状態方程式が式(6)で与えられるものとする。

$$\mathbf{y}(t+1) = \mathbf{C}\mathbf{y}(t) + \mathbf{G}\mathbf{v}_i(t) \quad (6)$$

また、我々の観測値ベクトルを表すモデルとして、加

法的な観測雑音  $\mathbf{v}_2(t)$  を仮定した観測方程式を式(7)に示す。

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{H}\mathbf{y}(t) + \mathbf{v}_2(t) \quad (7)$$

式(6), (7)が与えられたもので、定常状態における次期の最小分散推定量  $\hat{\mathbf{y}}(t+1/t)$  は、

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{y}}(t+1/t) &= \mathbf{C}\{\hat{\mathbf{y}}(t/t-1) \\ &\quad + \mathbf{K}(\mathbf{z}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t/t-1))\} \\ &= \mathbf{C}(\mathbf{E} - \mathbf{K}\mathbf{H})\hat{\mathbf{y}}(t/t-1) + \mathbf{C}\mathbf{K}\mathbf{z}(t) \end{aligned} \quad (8)$$

で与えられる [6], [7], [9]-[12]。ただし、 $\mathbf{y}(t)$  は真の状態を表す状態ベクトル、 $\mathbf{z}(t)$  は観測ベクトル、 $\mathbf{C}, \mathbf{G}, \mathbf{H}$  は適当な次数のパラメータ行列、 $\hat{\mathbf{y}}(t+1/t)$  は時間  $t$  における  $\mathbf{y}(t+1)$  の予測ベクトル (最小二乗推定量) である。  $\mathbf{K}$  はカルマンゲインと呼ばれる、次式から導かれる。

$$\mathbf{K} = \mathbf{P}\mathbf{H}^T[\mathbf{H}\mathbf{P}\mathbf{H}^T + \mathbf{V}]^{-1} \quad (9)$$

$\mathbf{V}$  は観測誤差  $\mathbf{v}_2(t)$  の共分散行列であり、 $\mathbf{P}$  は次のリカッチ方程式により求められる。

$$\mathbf{P} = \mathbf{C}(\mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{H}^T[\mathbf{H}\mathbf{P}\mathbf{H}^T + \mathbf{S}]^{-1}\mathbf{H}\mathbf{P})\mathbf{C}^T + \mathbf{G}\mathbf{G}^T \quad (10)$$

また、最適レギュレータ、カルマン・フィルタともに、可制御性、可観測性 [9], [10] をみたまものとする。

## 3. 制御対象の生産-在庫システム

### 3.1 生産-在庫システムの前提条件

本研究では、図1に示すような生産-在庫システムを対象とする。1回分の発注量(生産指示量)に制限はなく、品切れは起こらないものとする。品切れ率は在庫量の分散が与えられたもとで計算できるので、この解をもとに品切れの問題を扱えばよい。

リードタイム  $L$  は  $L = (\text{調達期間}) + (\text{発注サイクル期間})$  で定義される。本稿ではまず、リードタイム  $L=1$  の場合を定式化した後で、リードタイムを一般化する方法について述べる。  $L=1$  は、調達期間=0、発注サイクル期間=1の即納を意味する。リードタイムは、最適制御理論ではムダ時間の問題と呼ばれ、状態方程式の設計法により解決される。

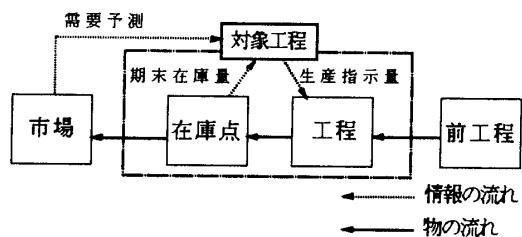


図1 生産-在庫システム

### 3.2 需要時系列モデル

本研究で対象とする需要時系列は、系列相関をもった系列（時間的に隣接したものどうしが近い値をもつ傾向を示す）とする。

このように多種多様な確率過程に基づく需要時系列の中で、予測システムのモデル化が比較的容易な定常ARモデル（自己回帰モデル）を取り上げる。需要モデルの次数（需要モデルが過去何期までの需要量の情報を必要とするか）とパラメータ（モデル上で需要に掛かる係数）は、適切なシステム同定がなされているものと仮定する。

## 4. 定式化

本研究では押し出し型の生産一在庫システムを対象としているため、発注を行うためには、市場の需要量をまず予測し、その情報を用いて発注量を決定しなくてはならない。そこでまず予測システムについて述べ、つぎに発注システムについて論じる。

### 4.1 需要モデル

$n$  次のARモデルを式(11)に示す。 $t$ 期の需要の状態を  $\delta_{(t)} \in \mathbf{R}^1$ 、雑音を  $e_{1(t)} \in \mathbf{R}^1$  を表したとき、

$$\delta_{(t)} = c_1 \delta_{(t-1)} + \dots + c_n \delta_{(t-n)} + e_{1(t)} \quad (11)$$

と表現される。実際の需要量はこの値に観測雑音  $e_{2(t)} \in \mathbf{R}^1$  が加わることを仮定し、状態モデルを次式で表現する。

$$\mathbf{d}(t+1) = \mathbf{C}\mathbf{d}(t) + \mathbf{v}_1(t) \quad (12)$$

$$\mathbf{D}(t) = \mathbf{d}(t) + \mathbf{v}_2(t) \quad (13)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d}(t) = \begin{bmatrix} \delta_{(t)} \\ \delta_{(t-1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \delta_{(t-n+1)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_i(t) = \begin{bmatrix} e_{i(t)} \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}, \quad i=1, 2$$

ただし、 $\mathbf{d}(t) \in \mathbf{R}^n$  は需要状態ベクトル、 $\mathbf{D}(t) \in \mathbf{R}^n$  は需要実績値（観測値）ベクトル、 $\mathbf{v}_1(t) \in \mathbf{R}^n$  と  $\mathbf{v}_2(t) \in \mathbf{R}^n$  はそれぞれ状態モデル誤差と観測モデル誤差（白色ガウス系列）である。つまり、需要実績値には観測誤差が加わっていると仮定する。需要状態ベクトルは、観測雑音に加わる前の需要の真の状態である。

また、本研究を通じて、時間  $t$  を表す添え字を  $\mathbf{x}(t)$  のように表現したものはベクトル、 $\mathbf{x}(t)$  のように表現したものはスカラを意味する。

### 4.2 カルマン・フィルタを用いた需要予測システム

需要予測にカルマン・フィルタ〔6〕-〔9〕を用いた理由を以下に挙げる。

- 1) 需要時系列が線形・離散時間確率システムの状態方程式で記述できる。
- 2) ARモデルのみの予測と比べ、予測誤差分散をより小さくする可能性がある。
- 3) 本予測システムの予測誤差は、後に述べる最適レギュレータにおいてシステムノイズがガウス白色系列でなくてはならないという条件を満たす。

ここでは、ARモデルに対しての予測システムについて述べる。システムパラメータ  $\mathbf{C}$ 、 $\mathbf{G}$ 、 $\mathbf{H}$  が時間的に不変で、時間が十分経過した定常状態を考える。このときカルマン・フィルタは定係数システムとなり、定常カルマン・フィルタと呼ばれ、式(14)で表される。また、カルマン・フィルタのパラメータ行列の次数は、需要モデルの次数に依存している。

$$\hat{\mathbf{d}}(t+1/t) = \mathbf{C}(\mathbf{E} - \mathbf{K})\hat{\mathbf{d}}(t/t-1) + \mathbf{C}\mathbf{K}\mathbf{D}(t) \quad (14)$$

ただし、 $\hat{\mathbf{d}}(t+1/t)$  は  $(t-1)$  期の需要状態の予測量ベクトル、 $\mathbf{K}$  はカルマンゲイン、 $\mathbf{E}$  は単位行列である。

需要実績  $\mathbf{D}(t)$  と需要予測量  $\hat{\mathbf{d}}(t/t-1)$  の各々にかかる  $\mathbf{C}(\mathbf{E} - \mathbf{K})$ 、 $\mathbf{C}\mathbf{K}$  は、過去の需要実績量と予測量の情報を次期の需要予測量算出にどれだけ考慮するかを表している。 $\mathbf{K}$  は定常カルマンゲインであり、次式で表される。

$$\mathbf{K} = \mathbf{\Pi}[\mathbf{\Pi} + \mathbf{V}]^{-1} \quad (15)$$

式(10)より、 $\mathbf{\Pi}$  は次のリカッチ方程式をみたす。

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{C}(\mathbf{\Pi} - \mathbf{\Pi}[\mathbf{\Pi} + \mathbf{V}]^{-1}\mathbf{\Pi})\mathbf{C}^T + \mathbf{E} \quad (16)$$

ただし、 $\mathbf{V}$  は観測誤差  $\mathbf{v}_2(t)$  の共分散行列である。また、 $\mathbf{\Pi}$  の解はフィルタリング誤差を表し、予測システムの予測誤差  $\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \hat{\mathbf{d}}(t/t-1) - \mathbf{D}(t)$  の分散は  $\mathbf{C}\mathbf{\Pi}\mathbf{C}^T + \mathbf{V}$  となる。ただし、システムは可制御・可観測とする。

カルマンフィルタを用いた需要予測では、需要実績値には観測雑音に加わっていることを仮定するが、このため需要系列の不規則変動に過度に依存しない予測が可能になり、実験的に有効性が示されている〔11〕、〔12〕。

以上のように、式(14)によって次期の需要予測を行うものとする。

### 4.3 定期発注—需要予測システムの状態空間表現

まず, Vassian の定期発注システム[2]より, 期末在庫量の差分方程式を用いる.

$$I_{(t+1)} = I_{(t)} + O_{(t-L+1)} - D_{(t+1)} \quad (17)$$

ただし,  $I_{(t)}$  は  $t$  期末の在庫量,  $O_{(t-L+1)}$  は  $(t-L+1)$  期の発注量で  $(t+1)$  期に納入される量,  $D_{(t)}$  は  $t$  期の需要量を表す.

以下ではまず  $L=1$  として考える. 上式の中で  $t$  期において,  $(t+1)$  期の需要量を正確に把握するのは不可能である. そこで式(17)の需要量  $D_{(t+1)}$  を需要予測量の  $\hat{d}_{(t+1/t)}$  に置き換え, 需要の実績量と予測量の間に生じる予測誤差  $\varepsilon_{1(t)}$  を付加する.

$$I_{(t+1)} = I_{(t)} + O_{(t)} - \hat{d}_{(t+1/t)} + \varepsilon_{1(t)} \quad (18)$$

ここで, 在庫の差分方程式(18)の関係を式(19)の形で表現できれば, 最適レギュレータにより最適制御入力を求めることができる.

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) + w(t) \quad (19)$$

ただし,  $w(t)$  は白色雑音である. しかし, 制御対象を在庫量  $I_{(t)}$  とし, 制御入力を発注量  $O_{(t)}$  としてスカラの状態モデルで考えると, 式(18)の需要推定値  $\hat{d}_{(t+1/t)}$  が状態モデルの中で表現されない. そこで, 状態変数  $x(t)$  はベクトルとしてもよいことを利用し, 需要予測量, 在庫量, 発注量という各々の変数を制御対象の内部状態に詳細に表現することにより, 状態モデルを構成する. 具体的には, 1行目に在庫モデル, 2行目以降には需要予測モデルを表現し, 多変数間の物理的な関係を表現するシステムパラメータ行列  $A$  を用いて状態空間モデルを構成することにする.

また, 最適レギュレータでは状態と制御入力の制御目標をゼロベクトルに設定しているため, 生産—在庫システムでは在庫量と発注量をそのまま適用するのではなく, 目標値からの偏差で制御系を構成する必要がある. 定常な需要時系列の場合, 在庫量目標値は安全在庫水準  $S$  となり, 発注量目標値は需要期待値  $\mu$  とする[4]. また, 需要予測量も需要期待値からの偏差として基準化する. 発注量目標値は需要の期待値とするのが適当と考えられるが, 在庫量目標値は安全在庫水準になり, 任意に決定できる. したがって本システムで在庫量目標値は, 発注量期待値と両変動には影響しない. 安全在庫水準については, 在庫量分散が導出されてから, 品切れなどを考慮して決定すればよい.

式(14)は,

$$\hat{d}(t+1/t) = C\hat{d}(t/t-1) + CK\{\hat{d}(t/t-1) - D(t)\} \quad (20)$$

のように需要予測量ベクトルと予測誤差ベクトルの線形和の形で書ける. ただし,

$$\hat{d}(t+1/t) = \begin{bmatrix} \hat{d}_{(t+1/t)} \\ \hat{d}_{(t/t)} \\ \vdots \\ \hat{d}_{(t-n+2/t)} \end{bmatrix} \quad (21)$$

とする. 一方, 予測誤差ベクトル

$$\varepsilon(t) = \hat{d}(t/t-1) - D(t) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{2(t)} \\ \varepsilon_{3(t)} \\ \vdots \\ \varepsilon_{n+1(t)} \end{bmatrix} \quad (22)$$

は白色雑音となるから,  $w(t)$  を

$$w(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & CK & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{1(t)} \\ \varepsilon_{2(t)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \varepsilon_{n+1(t)} \end{bmatrix} \in R^{n+1} \quad (23)$$

と定義すると,  $w(t)$  も白色雑音系列となる. したがって, 制御対象である状態空間モデルを

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) + w(t) \quad (24)$$

と構成できる. ただし,

$$x(t) = \begin{bmatrix} I_{(t)} - S \\ \hat{d}_{(t+1/t)} - \mu \\ \cdot \\ \cdot \\ \hat{d}_{(t-n+2/t)} - \mu \end{bmatrix} \in R^{n+1} : \text{状態ベクトル}$$

$$u(t) = [O_{(t)} - \mu] \in R^1 : \text{制御入力ベクトル}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & C & & & \\ \cdot & & & & \\ 0 & & & & \end{bmatrix} \in R^{(n+1) \times (n+1)},$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ \xi \\ \vdots \\ \xi \end{bmatrix} \in R^{(n+1)}$$

: システムパラメータ行列である. 式(24)は, 在庫モデルと需要予測モデルを同時に表現し, かつ式(19)の形になる.  $w(t)$  の部分は予測誤差の線形演算で構成され, 予測はカルマン・フィルタを用いていることから,  $w(t)$  は白色雑音であることが保証される. システムに可制御性を持たせるためには  $\xi$  に極小の正定数を入れる必要があるが[6], [7], 需要系列が定常安定であることが仮定できれば, 在庫制御のためには  $\xi=0$  でかまわない. この場合, 式(24)は厳密に在庫モデルと需要モデルを表



$$\begin{bmatrix} \xi \\ \xi \\ \vdots \\ \xi \\ \xi \\ \vdots \\ \xi \end{bmatrix} + \frac{1}{\xi} [\mathbf{O}_{(t)} - \mu] + \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & CK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{1(t)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \varepsilon_{2(t)} \\ \vdots \\ \vdots \\ \varepsilon_{n+1(t)} \end{bmatrix} \quad (34)$$

ただし、

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots & & & & & \mathbf{0} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$W_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots & & & & & \mathbf{0} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

である。式(34)は制御入力の時遅れも表現しており、このシステムに対して最適レギュレータを適用すれば、同様の議論により、最適制御入力を求めることができる。このように最適レギュレータは制御対象システムを式(1)のように記述しさえすれば、同様の解法で最適制御入力を求めることができる。

### 5. 数値計算例

ここでは、本研究で提案した発注システムの挙動を検証することを目的として、実際にシミュレーションにより挙動を確認する。

#### 5.1 対象需要時系列モデル

需要系列は、2次のARモデルを仮定する。モデルのパラメータは既知とし、リードタイムは  $L=1$  とした。

対象需要時系列は式(35)、(36)とし、1000期分の需要量のデータを用意した。その一部を図2に示す。

$$\delta_{(t+1)} = 0.72\delta_{(t)} + 0.28\delta_{(t-1)} + e_{1(t)} \quad (35)$$

$$d_{(t)} = \delta_{(t)} + e_{2(t)} \quad (36)$$

需要の定常分布はガウス分布  $N(440, 94.4^2)$  とし、初期値は  $\delta_{(1)}=300$ ,  $\delta_{(2)}=280$  とした。  $e_{1(t)}$  は  $N(0, 20^2)$  に従う白色ガウス系列、  $e_{2(t)}$  は  $N(0, 10^2)$  に従う白色ガウス系列と設定した。

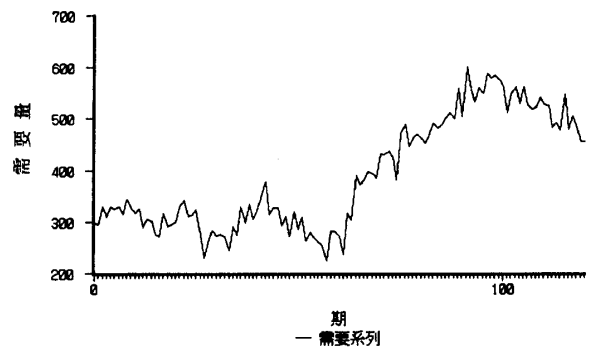


図2 需要系列 (120期)

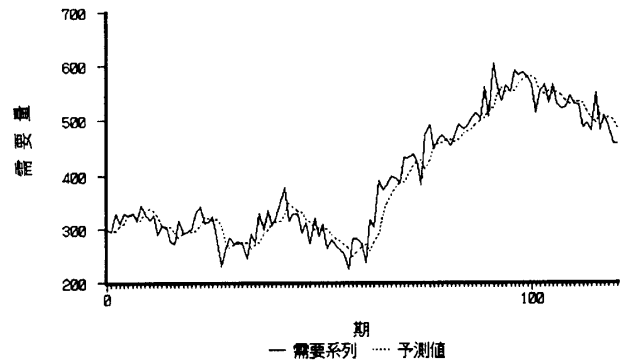


図3 需要系列と予測値

#### 5.2 予測モデル

定常カルマン・フィルタの理論を用いて式(35)、(36)の需要モデルの予測モデルを計算すると式(37)のようになる。

$$\hat{d}(t+1/t) = C(E-K)\hat{d}(t/t-1) + CKD(t) \quad (37)$$

$$C(E-K) = \begin{pmatrix} 0.217 & 0.049 \\ 0.319 & -0.046 \end{pmatrix}, \quad CK = \begin{pmatrix} 0.503 & 0.231 \\ 0.647 & 0.046 \end{pmatrix}$$

このとき、  $\hat{d}$  の定常分布は  $N(440, 91.5^2)$  とする本予測システムによる予測結果の一部を図3に示す。

#### 5.3 状態空間モデル

次に、予測モデルを含んだ状態空間モデルを式(38)で表す。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{(t+1)} - \mathbf{S} \\ \hat{d}_{(t+2/t+1)} - \mu \\ \hat{d}_{(t+1/t+1)} - \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0.72 & 0.28 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{(t)} - \mathbf{S} \\ \hat{d}_{(t+1/t)} - \mu \\ \hat{d}_{(t/t)} - \mu \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \times 10^{-6} \\ 1 \times 10^{-6} \end{bmatrix} [\mathbf{O}_{(t)} - \mu] + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.50 & 0.23 \\ 0 & 0.65 & 0.05 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{1(t)} \\ \varepsilon_{2(t)} \\ \varepsilon_{3(t)} \end{bmatrix} \quad (38)$$

5.4 数値計算の結果

本研究の発注システムにおいて、ウエイト  $q, r$  の置き方により制御効果は変化する。そこで  $q, r$  の相対的關係を  $q:r$  で表し、 $q:r=1:0^+, q:r=1:1, q:r=0^+:1$  の3通りを設定した。ここで、 $0^+$  は0に近い極小の正数を意味し、ここでは  $0^+=1 \times 10^{-8}$  を使用した。

発注量の挙動を図4、在庫量の挙動を図5に示す。 $q:r=0:1$  の場合の在庫量の挙動は、他に比べばらつきが大きすぎるため表示できなかった。

各々の  $q:r$  に対しての、発注量分散・在庫量分散の値を表1に示す。ただし、それぞれの分散を需要量分散で割り、基準化したものである。

在庫量、発注量分散は、ウエイトと予測誤差分散から算出できる。ここでは、今回の需要系列1000期分のデータより、理論値とシミュレーション結果を比較し、式(31)と(32)の理論値を検討する。与えた数値

表1 発注量分散比・在庫量分散比

$q:r$	1:0	1:1	0:1
発注量分散	1.048	0.990	$1.069 * 10^{-7}$
在庫量分散	0.304	0.989	96.05

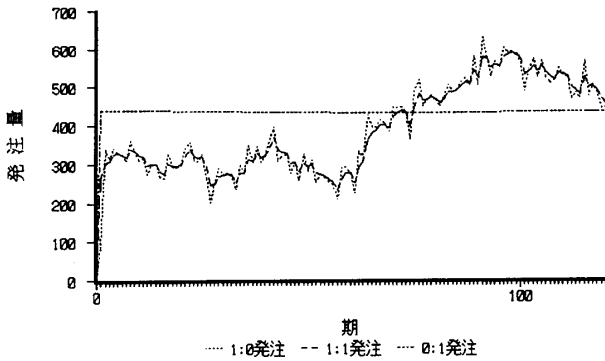


図4 発注量の挙動

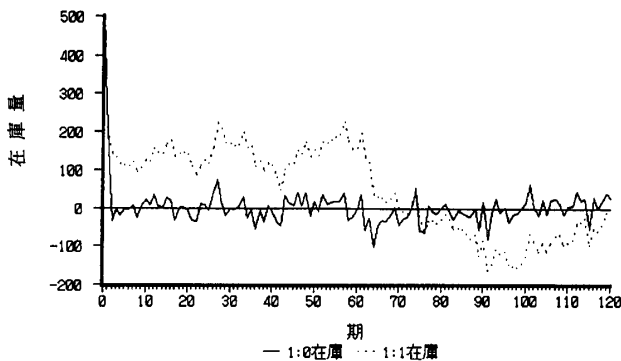


図5 在庫量の挙動

は、需要量分散が  $94.4^2$ 、予測誤差分散が  $91.5^2$ 、予測量分散が  $30.5^2$  である。

5.5 考察

$q:r=1:0$  は在庫量分散を最小に制御し、 $q:r=1:1$  は発注量変動と在庫量変動を  $q:r=1:1$  の重みで制御し、また  $q:r=0:1$  のときは発注量のみの制御を実現する。表1、図4、図5より、在庫量変動と発注量変動はトレードオフの關係にあり、重み  $q$  と  $r$  により、制御の強さを調整できることがわかる。また、 $q:r=0:1$  のときは、発注量を需要期待値として常に一定量に発注する定期定量発注システムとなる。

図6の発注量分散の計算結果と理論値は、ほぼ等しいといえる。わずかに値が異なるのはウエイト  $q, r$  で決められたフィードバックゲインにより、定常状態へ収束する速度に違いがあるためである。図7の在庫量分散についても同様である。

以上により、本研究で提案した発注システムが在庫量分散と発注量分散を制御しており、需要モデルのシステム同定が適切である場合、在庫量と発注量は理論式通りの挙動を示すと判断できる。通常、需要のARモデルの次数とパラメータはサンプルから同定する必要があり、情報量基準などを用いてモデルを構築する

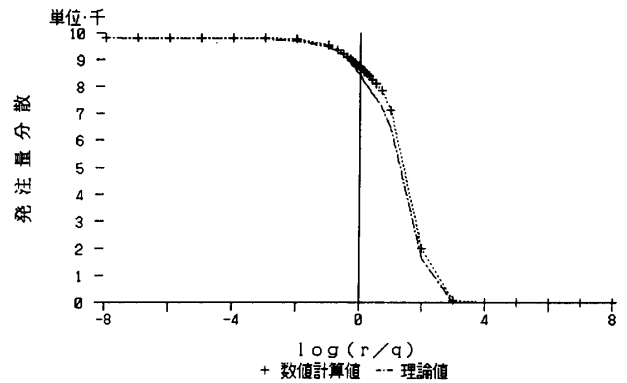


図6 発注量分散の数値計算結果と理論値

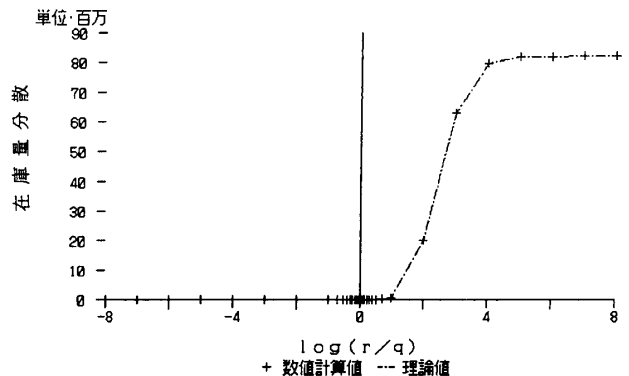


図7 在庫量分散の数値計算結果と理論値

が、その制御性能について検討することが今後の課題となろう。

## 6. 結 論

本研究では、単1品目、単1工程の生産-在庫システムを対象とし、発注量変動を制御し、かつ在庫量変動をも制御する定期発注システムを離散型最適制御問題として定式化し、両変動の理論式を示した。

数値計算により、定式化の妥当性を解析した結果、両変動がバランスよく制御され、制御結果は理論値とよく整合することが明らかになった。

## 参 考 文 献

- [1] Pinkham, R.: "An Approach to Linear Inventory-Production Rules", *Oper. Res.*, pp. 185-189, Vol. 6, No. 2, (1958)
- [2] Vassian, H. J.: "Application of Discrete Variable Servo Theory to Inventory Control", *Oper. Res.*, pp. 272-281, Vol. 3, No. 3, (1955)
- [3] 十代田三知男: "定期発注システムにおける在庫量および発注量の変動に関する研究", 学位論文, 早稲田大学, (1971)
- [4] 俵 信彦: "発注量変動と在庫量変動を制御する定期発注システムの研究", 学位論文, 早稲田大学, (1992)
- [5] 平川保博: "生産計画規則の決定~生産・在庫システムの研究(第2報)~", *日本経営工学会誌*, pp. 343-348, Vol. 26, No. 4, (1976)
- [6] 加藤寛一郎: 「最適制御入門」, 東京大学出版会, (1993)
- [7] 嘉納秀明, 江原信郎, 小林博明, 小野 治: 「動的システムの解析と制御」, コロナ社, (1991)
- [8] Najafi, H. and Bennett, H. E.: "Inventory-Production Optimization Using Optimal Control Theory Technique", *Proc. Annu. Southeast Symp-syst Theory*, pp. 12-15, Vol. 6, (1984)
- [9] 有本 卓: 「カルマン・フィルタ」, 産業図書, (1976)
- [10] 片山 徹: 「応用カルマン・フィルタ」, 朝倉書店, (1983)
- [11] 宮武信春: "経済予測へのカルマンフィルターの応用", *オペレーションズ・リサーチ*, pp. 646-651, 11月号, (1977)
- [12] 加瀬滋男, 太田 宏: "カルマンフィルタによる需要予測", *日本経営工学会誌*, pp. 40-47, No. 52, (1973)