報　　文

有色雑音をもつ線形システムの最適制御則と定期発注システムへの適用

後藤正幸*, 内園みどり**, 俵　信彦**

生産―在庫システムでは，在庫量と発注量をともに制御する発注システムの研究が重要である．この問題に対して最適な発注システムを構成し，同時に需要系列の変化への対処，多段階への拡張を考えると，最適制御理論による定式化が必要である．このためには自己相関をもつ需要系列に対して，最適制御則を構成しなければならない．一方，最適レギュレータは雑音の白色性を仮定しており，有色雑音をもつシステムの最適制御則は厳密に研究されておらず，このような有色雑音に対する最適制御則を定式化することは，工学的に意味がある．そこで，本稿ではまず，有色雑音の存在する線形システムの有限時間の最適制御則を定式化し，定常解へと拡張する．さらに，この制御系を単一品目，単一工程の生産―在庫システムに適用して，最適な発注システムを構成する．

Optimal Control for Linear System with Colored Noise and Its Application to Periodical Ordering System

Masayuki GOTOH*, Midori UCHIZONO** and Nobuhiko TAWARA**

The objective of this paper is to formulate the optimal control system for the linear system with colored noise and to apply to the periodical ordering system for the push-type production and inventory systems, which provides the possible procedure to control both the variances of order quantity and inventory. This system realizes the optimization of the criterion of the weighted sum of the variances of production and inventory. For the extension to the solution of multi-stage process and of the case the demand is not stationary, it is necessary to formulate the control system by the optimal control theory. However, the optimal regulator control which is the conventional optimal control theory can be applied directly to the system with colored noise. In this paper, we propose the new formulation of this problem and the application to the production and inventory control system.

1. はじめに

線形システムの最適制御においては，制御対象である状態ベクトル(目標値からの偏差)，および制御入力の大きさの両方を小さくするという目標があり，状態ベクトルと制御入力ベクトルの二次形式の評価関数を最小化する最適レギュレータが知られている．一方，定期発注システムにおいても同様の問題があり，在庫量と発注量の両変動をバランスよく制御することの重要性が指摘されている〔1〕～〔11〕．

このような定期発注システムとしては，十代田のγ型定期発注システム〔2〕，平川のZ型定期発注システム〔3〕，俵のG型定期発注システム〔4〕，〔5〕などの方式が提案されている．また，他の視点からも数多くの研究がなされている〔6〕～〔8〕，〔10〕，〔11〕．

* 早稲田大学（Waseda University）
** 武蔵工業大学（Musashi Institute of Technology）
受付：1995年9月7日，再受付（2回）
受理：1996年3月28日

これらの方式は，まず制御系を構成し，そのもとでパラメータを最適化する方式であり，主に伝達関数法を用いて解析される．従ってγ型，G型は簡便な発注式であるが，制御系の最適性に関しては保証を与えていない．一方，Z型は発注式が無限期間先までの需要予測量を必要とする．

これに対し，システムを状態空間でとらえ，有限時間での最適な制御則を構成し，その解の無限時間の極限をとることで定常最適解を得る方法が現代制御理論の立場である．定期発注システムを最適レギュレータの理論から定式化する試みがすでにあるが〔9〕～〔11〕，例えば〔9〕の方法では需要を白色系列と限定しているし，〔10〕の方法では近似解しか得られていない．また，〔11〕の方法は制御対象モデルが複雑化することや，定常解の収束条件が明確になっていないなどの点で改善の余地がある．これらは有色の需要系列を想定する定期発注システムに対し，白色雑音をもつ線形システムの最適制御である最適レギュレータを適用しようとすることに起因する．

一方，最適レギュレータはもともとノイズの存在しない線形システムに対して解かれ，白色雑音の存在する場合へと拡張された〔12〕～〔18〕．したがって，雑音が有色である場合には最適レギュレータの最適性は保証されない．ただし，この場合には，〔11〕の方法のように，有色雑音のモデルを白色雑音を入力とする成形フィルタで記述し，制御対象システムの次数を上げて線形システムで記述すれば，最適レギュレータが適用可能であることが知られている〔19〕，〔20〕．しかし，制御対象システム内に状態モデルと有色雑音モデルが混在してしまうので，管理上あるいは解釈上，これらのモデルは別々に構成した方が都合がよい．また，有限時間の最適制御では問題ないが，定常解を議論する場合，最適レギュレータに対する最適解の存在条件がそのまま適用できない．なぜなら，最適レギュレータの定常最適解の存在条件を満足させようとすると，近似解になってしまうからである〔10〕．さらに，予測システムとの併用を前提としていたため，予測システムの良さが制御結果に影響を及ぼしてしまう．

本稿では，有色雑音の存在する線形システムに対する最適な制御系を現代制御理論の面から構成することにより，状態モデルと有色雑音モデルを個々にとらえたままで，最適解を導出し，定常最適解の存在条件を示す．これにより，定常分散を評価関数とする定期発注システムを厳密な形で最適制御理論の面から定式化することができる．

本稿で提案する定期発注システムにおいては，① 近似解ではない，② 状態モデルと有色雑音モデルが別々に構成される，③ 制御系の最適性を保証する，④ 需要（有色雑音）を予測するという不要な制約が排除される，という点で〔10〕，〔11〕の問題点を解決する．したがって，定常分散の重み付け和を最小化するという意味では制御の限界を示したことになり，また，在庫モデルと需要モデルが別々に構成されるので，〔11〕の方法に比べて管理しやすいシステムが得られる．さらに，④により，需要予測システムとの併用を前提とする従来法と異なり，現時点の需要量の情報からそのまま最適解を生成するシステムが構成される．これは，制御のために最適な予測が内在的に構成されていることを意味する．

また，⑤ 一般的な有色の需要系列に適用できる，および，複数の状態量を制御したい場合に，制御対象システムをベクトル表現しさえすれば最適解が求められるという意味で拡張性を持つ．また，⑥ 最適制御理論の特徴である非定常システムへの拡張が可能であり，例えば需要系列が非定常な場合でも最適解を求めることが可能となる．

2. 定期発注システムと最適レギュレータ

2.1 定期発注モデル

単一品目，単一工程，リードタイム1の定期発注システムは式(1)で表される．在庫量の期待値は安全在庫量 S である．t 期の期末在庫量を I_t，発注量を O_t，需要量を d_t とすると，I_t は以下のように決定される〔21〕．

$$I_{t+1}=I_t+O_t-d_{t+1} \tag{1}$$

2.2 需要モデル

定期発注システムでは何らかの形で需要予測を行い，それに基づいて発注量を算出する．今期の需要が過去の需要に依存しない白色性の確率過程であるならば，最適レギュレータがそのまま適用できるが，需要系列は自己相関を持っていることを仮定する方が一般的といえる．

本研究では，ARモデルで表現される需要系列を仮定する．次数 k は有限で，漸近安定な定常確率過程であるとする．非定常を仮定して議論を進めることも可能であるが，ここでは定常の最適制御則を導くための仮定として，需要の定常性をおく．需要の平均値と分散を $\mu_D, \sigma_D{}^2$ とする．以上のような需要系列は，t 期における需要量を d_t として，

$$D_t=AD_{t-1}+V_t \tag{2}$$

$$D_t=[d_t-\mu_D, d_{t-1}-\mu_D,\cdots, d_{t-k}-\mu_D]^T \tag{3}$$

$$A=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots\cdots & a_{k-1} & a_k \\ 1 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$V_t=[v_t, 0,\cdots, 0]^T \tag{5}$$

と表現できる．ただし，T は転置を表す．

2.3 評価関数

定期発注システムの評価尺度として，以下の需要量分散に対する分散比の和〔1〕～〔11〕を設定する．

$$J=QW(I)+RW(O) \tag{6}$$

ただし，$W(I)=V(I)/\sigma_D{}^2$, $W(O)=V(O)/\sigma_D{}^2$ であり，$V(I)$ は在庫量分散，$V(O)$ は発注量分散，Q と R はそれぞれの重み付け係数である．

品切れや発注量の制限の問題については，まず数式解を導出し，その解をもとに，在庫量分散や発注量分散を制御する強さを決定すればよい．

2.4 従来システムの発注量算出式

式(1)の在庫モデルに対し，在庫量分散を最小化する方式としてVassianにより提案された標準定期発注システムは，

$$O_t{}^*=\hat{d}_{t+1}-I_t+S \quad (7)$$

で表される〔21〕．ただし，$\hat{d}_{t+1}$ は t 期における $t+1$ 期の需要予測量，S は安全在庫水準である．一方，両分散を制御する方式として，以下のような発注システムが提案されている．

1) γ 型定期発注システム

$$O_t=\hat{d}_{t+1}-\gamma(I_t-S) \quad (8)$$

2) Z 型定期発注システム

$$O_t=(1-Z)\left\{O_t^*+\sum_{k=1}^{\infty}\hat{d}_{t+k+1}Z^k\right\} \quad (9)$$

3) G 型定期発注システム

$$O_t=\mu_D+G(\hat{d}_{t+1}-I_t-\mu_D+S) \quad (10)$$

4) FK 型定期発注システム

$$O_t=\mu_D-F(I_t-S)+K(\hat{d}_{t+1}-\mu_D) \quad (11)$$

γ 型とG型は簡単な発注式であり，FK型は γ 型とG型を包含しているが，これらは最適性に関しては保証を与えていない〔24〕．Z型は無限時間先までの需要予測量を必要とする．

2.5 最適レギュレータ

一般に，$w(t)\in R^m$ を白色雑音として，線形システム

$$x(t+1)=Ax(t)+Bu(t)+Cw(t+1) \quad (12)$$

に対し，正定対称行列 $Q, R\in R^{n\times n}$ で重み付けられた評価関数

$$J=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T}E[x^T(t+1)Qx(t+1)+u^T(t)Ru(t)] \quad (13)$$

を最小化する問題を定常最適レギュレータという．ここで，$x(t)\in R^n$ は状態ベクトル，$u(t)\in R^r$ は制御入力ベクトル，$A\in R^{n\times n}, B\in R^{n\times r}, C\in R^{n\times m}$ はシステムパラメータベクトルである．この定常最適解の存在条件は，(A, B) が後で示す可安定対であることである．

いま，$x(t)=I_t-S, u(t)=O_t-\mu_D, w(t)=-d_t+\mu_D$ とおくと，式(1)は，

$$x(t+1)=x(t)+u(t)+w(t+1) \quad (14)$$

となる．式(6)の評価関数も，式(13)と等価になるから，この問題は，有色の雑音 $w(t)$ が存在する場合の確率的離散最適制御問題に帰着する．

もし $w(t)$ が白色雑音であるならば，最適レギュレータに帰着し，

$$u(t)=-Fx(t) \quad (15)$$

の形が最適な制御系であることが証明できる〔14〕～〔18〕．F は最適制御理論ではフィードバックゲインと呼ばれるものである．$w(t)$ が有色雑音であるとき，式(15)の最適性は保証されない．

有色雑音は白色雑音を入力する線形システムによりモデル化することができる．これを成形フィルタといい，本稿でも次のように成形フィルタを構成する．

$$w(t+1)=Dw(t)+v(t) \quad (16)$$

$v(t)$ は白色雑音であり，$w(t)$ は $D\in R^{m\times m}$ によって特徴づけられる有色雑音となる．この確率過程は，AR モデルで表現されるクラスの有色雑音を表現できる．

この場合，このままでは最適レギュレータを適用できないが，制御対象システムを，

$$\begin{pmatrix} x(t+1) \\ w(t+1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & CD \\ 0 & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ w(t) \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} B \\ O \end{pmatrix}u(t)+\begin{pmatrix} Cv(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \quad (17)$$

と記述すると，式(12)の形になり，最適レギュレータが適用可能となる．しかし，一般的にこのシステムは，あとで示す可安定性を満足しないので，定常最適解の存在条件については保証を与えていない．これを可安定化させると，

$$\begin{pmatrix} x(t+1) \\ w(t+1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & CD \\ 0 & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ w(t) \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} B \\ \delta \end{pmatrix}u(t)+\begin{pmatrix} Cv(t) \\ v(t) \end{pmatrix}, \delta\neq 0 \quad (18)$$

となり，このシステムに最適レギュレータを適用すると近似解となってしまう〔10〕，〔11〕．また，$x(t)$ と $w(t)$ を同時に記述したモデルになっており，管理上都合が悪い．

3. 有色雑音をもつ線形システムに対する最適制御則の定式化

本章では，式(12)において，$w(t)$ が有色雑音系列である場合の最適制御則を導出する．

式(16)を式(12)に代入すると，制御対象システムは，

$$x(t+1)=Ax(t)+Bu(t)+CDw(t)+Cv(t) \quad (19)$$

と記述される．制御対象システムをこの形で記述すると，最適レギュレータは適用できない．このシステムに対して最適な制御則が与えられれば，式(1)，(2)にそのまま適用可能となる．

ここで，m 期間の評価関数を，

$$J_m = E\left[\sum_{j=t}^{t+m-1}\{x^T(j+1)Qx(j+1)+u^T(j)Ru(j)\}\right] \tag{20}$$

$$f_m(x(t),u(t)) = \min J_m \tag{21}$$

と定義すれば，動的計画法に基づいて，最適な制御入力を求めることができる．ただし，Q, R は正定対称行列とする．

【定理 1】 $x(t), w(t)$ のもとで，式(20)の m 期間先までの最適制御の解は，

$$\begin{aligned} u(t+\tau) =& -F(m-\tau)x(t+\tau) \\ & -K(m-\tau)w(t+\tau) \\ & ;\ \tau=0,1,\cdots,m-1 \end{aligned} \tag{22}$$

で与えられる．ただし，

$$\begin{aligned} F(m) =& [R+B^T\{Q+S_x(m-1)\}B]^{-1} \\ & \cdot B^T\{Q+S_x(m-1)\}A \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned} K(m) =& [R+B^T\{Q+S_x(m-1)\}B]^{-1} \\ & \cdot B^T\{(Q+S_x(m-1))C+S_{xw}(m-1)\}D \end{aligned} \tag{24}$$

であり，評価関数の最小値 $f_m(x(t),w(t))$ は，

$$\begin{aligned} f_m(x(t),w(t)) =& x^T(t)S_x(m)x(t) \\ & +x^T(t)S_{xw}(m)w(t) \\ & +w^T(t)S_{xw}{}^T(m)x(t) \\ & +w^T(t)S_w(m)w(t) \\ & +\mathrm{Const}(m) \end{aligned} \tag{25}$$

で与えられる．ここで，$S_x(m), S_{xw}(m), S_w(m)$, $\mathrm{Const}(m)$ は，

$$S_x(0)=S_{xw}(0)=S_w(0)=O \tag{26}$$

$$\mathrm{Const}(0)=O \tag{27}$$

として，

$$\begin{aligned} S_x(m) =& A^T[Q+S_x(m-1)- \\ & \{Q+S_x(m-1)\} \\ & \cdot B\{R+B^T(Q+S_x(m-1))B\}^{-1} \\ & \cdot B^T\{Q+S_x(m-1)\}]A \end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned} S_{xw}(m) =& A^T[(Q+S_x(m-1))C+S_{xw}(m-1)- \\ & \{Q+S_x(m-1)\}B\{R+B^T(Q+S_x(m-1))B\}^{-1} \\ & B^T\{(Q+S_x(m-1))C+S_{xw}(m-1)\}]D \end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned} S_w(m) =& D^T[C^T(Q+S_x(m-1))C+C^TS_{xw}(m-1) \\ & +S_{xw}^T(m-1)C+ \\ & +S_w(m-1)-\{(Q+S_x(m-1))C \\ & +S_{xm}(m-1)\}^T \\ & \cdot B\{R+B^T(Q+S_x(m-1))B\}^{-1} \\ & \cdot B^T\{(Q+S_x(m-1))C+S_{xw}(m-1)\}]D \end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Const}(m) =& E[v^T(t)\{C^T(Q+S_x(m-1))C \\ & +C^TS_{xw}(m-1) \\ & +S_{xw}^T(m-1)C+S_w(m-1)\}v(t)] \\ & +\mathrm{Const}(m-1) \end{aligned} \tag{31}$$

である．ただし，O は要素が 0 の行列を表す． □

（証明） 付録 1 参照 □

【注 1】 式(28)は，最適レギュレータのリカッチ方程式〔27〕と等価であり，式(29)，(30)が雑音の有色性から新たに導かれた方程式である．式(25)に示されたように，式(28)は評価関数の最小値の状態ベクトルの二次形式に依存する部分を，式(30)は有色雑音の二次形式に関する部分を，式(29)は双方の相関に関する部分を，それぞれ計算していることに相当し，これらが別々の式で構成されることは，最適解の解釈上好ましいことである． □

この解は m 期間先までの評価関数を最小化するものとなっているが，定常的な評価関数の最小化を考える場合，$m\to\infty$ とした評価関数

$$\bar{J} = \lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}J_m \tag{32}$$

を最小化する定常解が存在するかどうかが問題となる．そのために，まず次の補題を示す．

【補題 1】 非負定対称行列 $P(m)$ を以下のように，定義する．

$$P(m)=\begin{pmatrix} Q+S_x(m) & S_{xw}(m) \\ S_{xw}^T(m) & S_w(m) \end{pmatrix},$$

$$P(0)=M=\begin{pmatrix} Q & O \\ O & O \end{pmatrix} \tag{33}$$

このとき，$P(m)$ は単調非減少列である．ここで，$P(m)$ が単調非減少であるとは，$P(m)-P(m-1)\geqq O$（非負定値行列）であることを意味する． □

（証明） 付録 2 参照 □

次に，式(32)を最小化する定常解の存在条件として必要な行列の可安定性を定義する．

【定義 1】 $F+GK$ が漸近安定となるように，行列 K をとることができるとき，(F,G) は可安定であるという．

この可安定性を用いると，以下の補題を導くことができる．

【補題 2】 $(B,A),(B,CD)$ が可安定，D が定常安定な行列であれば，任意の初期値 $P_0\geqq O$ に対し，系列 $P(m)$ は有界である． □

（証明） 付録3参照

したがって，補題1，2より，$P(m)$ は $m\to\infty$ で収束するので，次の定理が成り立つ．

【定理2】 $(B, A), (B, CD)$ が可安定，雑音系列が定常安定な系列，初期値を $P(0)=M$ とすれば，$m\to\infty$ とした定常解 $S_x(m)\to S_x$, $S_{xw}(m)\to S_{xw}$, $S_w(m)\to S_w$ が存在する． □

【定理3】 定理2と同じ条件のもとで，時間 t において，無限時間先までの評価関数を最小化する定常解は，

$$u(t)=-Fx(t)-Kw(t) \tag{34}$$

の形で与えられ，各々の定常フィードバックゲイン F, K は，

$$F=[R+B^T\{Q+S_x\}B]^{-1}B^T\{Q+S_x\}A \tag{35}$$

$$K=[R+B^T\{Q+S_x\}B]^{-1}B^T\{(Q+S_x)C+S_{xw}\}D \tag{36}$$

で与えられる．評価関数の最小値 $\bar{J}$ は，

$$\begin{aligned}\bar{J}&=\min\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}J_m\\&=E[v^t(t)\{C^T(Q+S_x)C+C^TS_{xw}\\&\quad+S_{xw}^TC+S_w\}v(t)]\\&=tr[\{C^T(Q+S_x)C+C^TS_{xw}+S_{xw}^TC+S_w\}V]\end{aligned} \tag{37}$$

となる．ただし，V は $v(t)$ の分散共分散行列であり，S_x, S_{xw}, S_w は，

$$\begin{aligned}S_x=A^T[Q+S_x-\{Q+S_x\}^T\\ \cdot B\{R+B^T(Q+S_x)B\}^{-1}B^T\{Q+S_x\}]A\end{aligned} \tag{38}$$

$$\begin{aligned}S_{xw}=A^T[(Q+S_x)C+S_{xw}\\-(Q+S_x)^TB\{R+B^T(Q+S_x)B\}^{-1}\\ \cdot B^T\{(Q+S_x)C+S_{xw}\}]D\end{aligned} \tag{39}$$

$$\begin{aligned}S_w=D^T[C^T(Q+S_x)C+C^TS_{xw}+S_{xw}^TC+S_w\\-\{(Q+S_x)C+S_{xw}\}^T\\ \cdot B\{R+B^T(Q+S_x)B\}^{-1}\\ \cdot B^T\{(Q+S_x)C+S_{xw}\}]D\end{aligned} \tag{40}$$

で与えられる． □

以上により，有色雑音をもつ線形システムの最適制御則が定式化できた．この定式化は，D をゼロ行列とすれば最適レギュレータに帰着するので，最適レギュレータを包含したものになっている．

【注2】 定理3の結果は，式(17)に対する最適レギュレータを構成し，その際のリカッチ方程式の行列成分を，$x(t)$ と $w(t)$ に関する式に分解することによっても与えられる．この場合，定常最適レギュレータの定常解の存在条件は適用できないので，厳密には漸近最適性が保証されない．ただし，最適解の存在条件を定理2と同様にすれば，同様の結果を導くことができる． □

次の定理は，制御系の一意性と漸近安定性を保証するものである．

【定理4】 $(B, A), (B, CD)$ が可安定，雑音系列が定常安定な系列とすれば，式(38)～(40)の解は一意的に存在し，かつ式(34)～(36)による制御は漸近安定となる． □

（証明） 付録4参照 □

【定理5】 式(38)～(40)の解は一意的に存在し，かつ式(34)～(36)による制御が漸近安定となるとき，$(B, A), (B, CD)$ は可安定，雑音系列は定常安定な系列である． □

（証明） 式(88)が定常リカッチ方程式の形をしていることから，定理4の逆も成り立つ〔23〕． □

以上より，最適レギュレータと同様に，あらかじめ式(38)～(40)を解き，式(34)～(36)で制御を行えば，定常的に最適な制御系が構成できることが明らかとなった．定常解の存在条件に関しては，可安定性の条件を強めた可制御性により議論することもできるが，ここでは述べない．

次に，この制御系における定常の分散共分散行列を与える定理を示す．

【定理6】 定理1で示した最適制御において，定常分散共分散行列を，$\Lambda_x=E[x(t)x^T(t)]$, $\Lambda_{xw}=E[x(t)w^T(t)]$, $\Lambda_w=E[w(t)w^T(t)]$ とおけば，これらは，

$$\begin{aligned}\Lambda_x=(A-BF)\Lambda_x(A-BF)^T\\+(CD-BK)\Lambda_{xw}^T(A-BF)^T\\+(A-BF)\Lambda_{xw}(CD-BK)^T\\+(CD-BK)\Lambda_w(CD-BK)^T\\+CVC^T\end{aligned} \tag{41}$$

$$\Lambda_{xw}=(A-BF)\Lambda_{xw}D^T+(CD-BK)\Lambda_wD^T+CV \tag{42}$$

$$\Lambda_w = D\Lambda_w D^T + V \qquad (43)$$

の解で与えられる．ただし，V は $v(t)$ の分散共分散行列である．また，制御入力の分散共分散行列 $\Lambda_u = E[u(t)u^T(t)]$ は，この解を用いて，

$$\Lambda_u = F\Lambda_x F^T + K\Lambda_{xw}^T F^T + F\Lambda_{xw} K^T + K\Lambda_w K^T \qquad (44)$$

で与えられる． □

（証明）

$$x(t) = (A-BF)x(t-1) + (CD-BK)w(t-1) + Cv(t-1) \qquad (45)$$

$$w(t) = Dw(t-1) + v(t-1) \qquad (46)$$

$$u(t) = -Fx(t) - Kw(t) \qquad (47)$$

より，これまでの議論と同様に，$E[x(t)x^T(t)]$, $E[x(t)w^T(t)]$, $E[w(t)w^T(t)]$, $E[u(t)u^T(t)]$ を計算し，$0 \to \infty$ の定常解を求めればよい． □

4. 定期発注システムの適用

本章では前章の結果を，指数型自己相関をもつ需要系列に対する単一工程，単一品目，リードタイム1の定期発注システムに適用した例を示す．〔10〕の方法では，このケースでもベクトル演算を必要としたのに対し，この方法ではスカラの演算ですみ，最適性も保証される．

指数型自己相関をもつ需要系列は1次のARモデルであり，

$$d_{t+1} - \mu_D = \lambda\{d_t - \mu_D\} + v_t \qquad (48)$$

で表される．v_t は分散 σ_t^2 の白色雑音である．式(19)において，$A=B=1$, $C=-1$, $D=\lambda$, $x(t)=I_t - S$, $u(t)=O_t-\mu_D$，とおけば，式(1)より，指数型自己相関係数 λ をもつ需要系列に対する定期発注システムが構成される．

$$(I_{t+1}-S) = (I_t - S) + (O_t - \mu_D) - \lambda(d_t - \mu_D) + v_t \qquad (49)$$

この定期発注システムにおいて，在庫量変動と発注量変動を共に制御するのが目的であり，評価関数は式(6)とする〔1〕．この場合，重み Q, R はスカラであり，需要量分散で基準化しても本質的に問題は等価だから，この最適化問題に定理1の結果を適用することができる．このとき，S_x, S_{xw}, S_w もスカラとなり，式(38)～(40)は，

$$S_x = Q + S_x - \frac{\{Q+S_x\}^2}{R+Q+S_x} \qquad (50)$$

$$S_{xw} = -\lambda\left[Q + S_x - \frac{\{Q+S_x\}\{-Q-R+S_x\}}{R+Q+S_x}\right] \qquad (51)$$

$$S_w = \lambda^2\left[Q + S_x - 2S_{xw} + S_w - \frac{\{-Q-S_x+S_{xw}\}^2}{R+Q+S_x}\right] \qquad (52)$$

と与えられる．これらはそのまま解くことができ，S_x が正定対称行列だから $S_x>0$ であるので，

$$S_x = \frac{-Q+\sqrt{Q^2+4QR}}{2} \qquad (53)$$

$$S_{xw} = \frac{-\lambda R\{Q+\sqrt{Q^2+4QR}\}}{2R(1-\lambda)+Q+\sqrt{Q^2+4QR}} \qquad (54)$$

が得られる．一方，式(34)～(36)は，

$$O_t - \mu_D = -F(I_t - S) - K(d_t - \mu_D) \qquad (55)$$

$$F = \frac{Q+S_x}{R+Q+S_x} \qquad (56)$$

$$K = \frac{\lambda\{-Q-S_x+S_{xw}\}}{R+Q+S_x} \qquad (57)$$

となるので，式(53)，(54)を代入すれば，次の定理が導かれる．

【定理7】 式(49)に対して，式(6)の評価関数を最小化する最適制御則は次式で与えられる．

$$O_t = \mu_D - F(I_t - S) - K(d_t - \mu_D) \qquad (58)$$

$$F = \frac{Q+\sqrt{Q^2+4QR}}{2R+Q+\sqrt{Q^2+4QR}} \qquad (59)$$

$$K = \frac{-\lambda\{Q+\sqrt{Q^2+4QR}\}}{2R(1-\lambda)+Q+\sqrt{Q^2+4QR}} \qquad (60)$$

□

この制御系における需要分散 σ_D^2，在庫量と需要量の定常共分散 $Cov(I, D)$，在庫量の定常分散 $V(I)$ は，式(41)～(43)より，

$$\sigma_D^2 = \frac{1}{1-\lambda^2}\sigma_v{}^2 \qquad (61)$$

$$Cov(I, D) = \frac{1}{1-(1-F)\lambda}\left\{\frac{-\lambda(\lambda+K)}{1-\lambda^2} - 1\right\}\sigma_v{}^2 \qquad (62)$$

$$V(I) = \frac{1}{F(2-F)}\left\{\frac{2\lambda(1-F)(\lambda+K)^2}{\{1-(1-F)\lambda\}(1-\lambda^2)} + \frac{2(1-F)(\lambda+K)}{1-(1-F)\lambda} + \frac{(\lambda+K)^2}{1-\lambda^2} + 1\right\}\sigma_v{}^2 \qquad (63)$$

で与えられる．一方，発注量分散 $V(0)$ は，式(44)より，

$$V(0) = F^2 V(I) + 2FK\cdot Cov(I, D) + K^2\sigma_D{}^2 \qquad (64)$$

で与えられる．これらを，2.3のように需要分散に対して基準化するには，これらを式(61)で割ればよい．**図1**に，Q, R の比を変化させたときの，発注量分散比と在庫量変動分散比の関係を示す．Q, R によって，両変動の大きさがトレードオフの関係にあることがわかる．これは最適な制御系であるので，これらより左

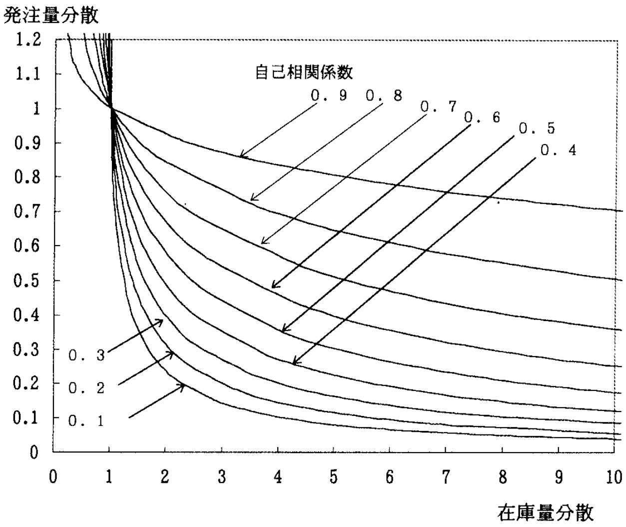

図1　在庫量変動と発注量変動の関係

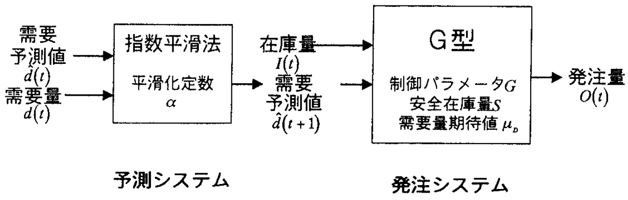

図2　G型定期発注システム

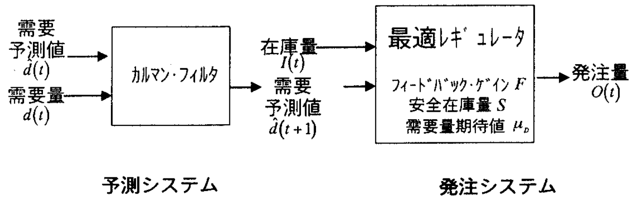

図3　〔11〕の発注システム

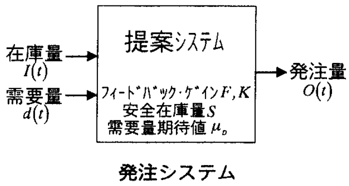

図4　提案システム

下の曲線を描くような制御系は存在しない．

本稿で示した制御系では，在庫モデルと需要モデルを別々の式で構成したまま，最適制御系を設計していることも1つの特徴で，このためγ型やG型と同じく，〔10〕,〔11〕の方式に比べて管理しやすいシステムになっている．また，需要予測値をもとに，発注量を決定する従来方式に対し，提案した方式では需要予測方式も事前に決定せず，需要の構造から最適な制御系を決定している．したがって，提案した方式は，暗に制御に最適な需要予測を構成しているともいえる．

5. 考　　察

4.の結果より，在庫量と需要予測量を別々に2つの制御パラメータをもつ制御系が式(6)の評価関数に対して最適であることが明らかとなった．式(8)，(10)のγ型，G型は式(58)の2つの制御パラメータF, Kに制限を加えたもとでの最適化と考えることもできる．つまり，γ型は$F=\gamma$, $K=1$, G型は$G=F=K$という制約のもとで各パラメータを最適化する方式といえる．

定理7の結果は，在庫量と需要量に別々のフィードバックゲイン（制御パラメータ）をもつ発注式が最適な制御系になっていることを示している．似た形の発注システムとして，FK型定期発注システム〔24〕があるが，FK型は需要予測システムの併用を前提とし，需要予測値にパラメータKを掛けている点で異なる．したがって，予測方式が制御のために最適に構成されていれば，FK型は提案方式と同等の制御性能をもつと考えられる．FK型の評価関数値はG型より小さく制御でき，需要自己相関の強い場合にその傾向が強まるが〔24〕，この制御系より優れる制御系は存在しないといえる．また，〔24〕では，最適なFとKを探索により最適化しているが，本稿の結果では，フィードバックゲインFとKが数式解として与えられていることも特徴である．

図2～図4にG型発注システム，〔11〕の最適レギュレータに基づく発注システム，提案した発注システムの構成図を示す．従来法が需要予測を前提として，そのもとで最適化されているのに対し，提案システムは，今期の需要量から直接最適な発注量を算出する．したがって，提案システムでは制御に最適な予測機構は内在的に保持しており，陽に予測システムを構成しないといえる．

生産計画の分野で動的計画法を用いること自体は新しいことではないが〔25〕,〔26〕，動的計画法による解を無限時間にとばして定常解を得る方法は現代最適制御理論でよく使われる方法であり，定常解の最適性を保証できる点で優れた解法といえる．マルコフ決定過程で表される定常システムの中には，動的計画法による最適な決定過程がある規則性をもってくるクラスが存在し，解の無限時間の極限をとることでその定常最適解を得ることができる．生産計画の問題のいくつかは，このような問題のクラスに属すると思われる．

6. 結　　論

本稿では，有色雑音の存在する線形システムに対す

る最適制御則を導出し，発注量変動と在庫量変動の両変動を制御する最適な定期発注システムを構成した．これにより，現代制御理論に基づく定期発注システムが定式化でき，最適性と今後の拡張性に優れるシステムが与えられた．

今後の課題としては，様々な需要系列に対する制御性能の解析，多段階在庫システムへの拡張などが挙げられる．

参考文献

〔1〕 Pinkham, R.: "An Approach to Linear Inventory-Production Rules", *Oper. Res.*, pp. 185-189, Vol. 6, No. 2, (1958)

〔2〕 十代田三知男："定期発注システムにおける在庫量および発注量の変動に関する研究"，学位論文，早稲田大学，(1971)

〔3〕 平川保博："生産計画規則の決定"，日本経営工学会誌，pp. 343-348, Vol. 26, No. 4, (1976)

〔4〕 俵　信彦，増井忠幸，鈴木晴久："Z 変換による G 型定期発注方式の解析"，日本経営工学会誌，pp. 275-282, Vol. 41, No. 4, (1990)

〔5〕 俵　信彦："発注量変動と在庫量変動を制御する定期発注システムの研究"，学位論文，早稲田大学，(1992)

〔6〕 平川保博，星野瑛二，片山　博："二段階生産システムにおける押し引き混成型生産指示方式の特性解析"，日本経営工学会誌，pp. 78-84, Vol. 43, No. 1, (1992)

〔7〕 片山　博："移動平均型需要量モデルの直交成分を利用した定期発注システムについて"，日本経営工学会誌，pp. 73-79, Vol. 37, No. 2, (1986)

〔8〕 高橋勝彦："生産指示量と実生産量との差異を調整する生産指示方式の特性解析"，日本経営工学会誌，pp. 81-85, Vol. 37, No. 2, (1986)

〔9〕 Najafi, H. and Bennett, H. E.: "Inventory-Production Optimization Using Optimal Control Theory Techniques", *Proc. Annu. Southeast Sympsyst Theory*, pp. 12-15, Vol. 6, (1984)

〔10〕 田村嘉浩，俵　信彦："発注量と在庫量の両変動を制御する生産―在庫システムの研究"，日本経営工学会平成 6 年度秋季研究大会予稿集，pp. 243-244, (1994)

〔11〕 田村嘉浩，後藤正幸，俵　信彦："最適レギュレータに基づく定期発注システムに関する研究"，日本経営工学会誌，pp. 542-549, Vol. 46, No. 6, (1996)

〔12〕 Dorato, P.: "Optimal Linear Regulators: The Discrete-Time Case", *IEEE Trans. on Automatic Control*, pp. 613-620, Vol. 16, No. 6, (1971)

〔13〕 有本　卓："不規則外乱の影響を最小にする最適フィードバック制御"，計測自動制御学会論文集，pp. 1-7, Vol. 2, (1966)

〔14〕 加藤寛一郎：「最適制御入門」，東京大学出版会，(1993)

〔15〕 Kwakernaak, H. and Sivan, R.: Linear Optimal Control Systems, Wiley-Interscience, (1972)

〔16〕 Saridis, G. N.: "Entropy Formulation of Optimal and Adaptive Control", *IEEE Trans. on Automatic Control*, pp. 713-721, Vol. 33, No. 8, (1988)

〔17〕 尾崎　純：「時系列論」，日本放送出版協会，(1988)

〔18〕 Gotoh, M., Hirasawa, S. and Tawara, N.: "A Formulation by Minimization of Differential Entropy for Optimal Control System", *IEICE Trans. Fundamentals*, pp. 569-577, Vol. E79-A, No. 4, (1996)

〔19〕 Bryson, A. E. and Johansen, D. E.: "Linear Filtering for Time-Varing Systems Using Measurements Containing Colored Noise", *IEEE Trans. Automatic Control*, pp. 4-10, Vol. 10, (1965)

〔20〕 高橋安人，北森俊行：「制御と力学系」，コロナ社，pp. 198-202, (1977)

〔21〕 Vassian, H. J.: "Application of Discrete Variable Servo Theory to Inventory Control", *Oper. Res.*, pp. 272-281, Vol. 3, No. 3, (1955)

〔22〕 有本　卓：「線形システム理論」，産業図書，(1974)

〔23〕 有本　卓：「カルマンフィルター」，産業図書，(1977)

〔24〕 後藤正幸，内園みどり，俵　信彦："FK 型発注システムによる定期発注システムの統一的考察"，日本経営工学会誌，pp. 565-572, Vol. 46, No. 6, (1996)

〔25〕 増井忠幸，百合本茂：「OR による生産流通システムの設計」，槙書店，(1988)

〔26〕 Odanaka, T.: Optimal Inventory Processes, Katakura Libri, INC. Tokyo, (1984)

〔27〕 狩野弘之，西村敏充："最適制御問題におけるマトリクス・リカッチ方程式"，計測と制御，pp. 666-675, Vol. 20, No. 6, (1981)

付録 1　定理 1 の証明

ここでは，動的計画法による解を数学的帰納法によって一般化する証明法を示す．以下では簡単のため，$t=0$ とおくが，一般性は失われない．

[Step 1] まず，1 期間の最適化問題を考える．式(20)において，$m=1$ とすれば，

$$J_1=E[x^T(1)Qx(1)+u^T(0)Ru(0)] \tag{65}$$

であるから，式(16)，(19)より，

$$\begin{aligned}J_1&=E[x^T(1)Qx(1)+u^T(0)Ru(0)]\\&=E[\{Ax(0)+Bu(0)+CDw(0)+Cv(0)\}^TQ\\&\quad\cdot\{Ax(0)+Bu(0)+CDw(0)+Cv(0)\}\\&\quad+u^T(0)Ru(0)]\\&=\{Ax(0)+Bu(0)+CDw(0)\}^TQ\{A_x(0)+Bu(0)\\&\quad+CDw(0)\}\\&\quad+u^T(0)Ru(0)+E[v^T(0)C^TQCv(0)]\\&=\{u(0)+(B^TQB+R)^{-1}B^TQ\{Ax(0)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+CDw(0)\}\}^T(B^TQB+R)\\
&\cdot\{u(0)+(B^TQB+R)^{-1}B^TQ\{A_x(0)\\
&+CDw(0)\}\}\\
&+x^T(0)\\
&\cdot A^T\{Q-QB(B^TQB+R)^{-1}B^TQ\}Ax(0)\\
&+x^T(0)\\
&\cdot A^T\{Q-QB(B^TQB+R)^{-1}B^TQ\}CDw(0)\\
&+w^T(0)D^TC^T\{Q-QB(B^TQB+R)^{-1}B^TQ\}\\
&\cdot Ax(0)\\
&+w^T(0)D^TC^T\{Q-QB(B^TQB+R)^{-1}B^TQ\}\\
&\cdot CDw(0)+E[v^T(0)C^TQCv(0)]
\end{aligned} \tag{66}
$$

B^TQB+R は正定対称行列であり，第1項以外は $u(0)$ に無関係であるから，式(66)を最小化する制御入力 $u(0)$ は，

$$u(0)=-(B^TQB+R)^{-1}B^TQ\{Ax(0)+CDw(0)\} \tag{67}$$

で与えられ，その最小値は，

$$
\begin{aligned}
f_1(x(0),\,w(0))&=\min J_1\\
&=x^T(0)S_x(1)x(0)+x^T(0)S_{xw}(1)w(0)\\
&\quad+w^T(0)S_{xw}^T(1)x(0)+w^T(0)S_w(1)w(0)\\
&\quad+E[v^T(0)C^TQCv(0)]
\end{aligned} \tag{68}
$$

となる．したがって，$m=1$ のとき，式(22)～(31)は成り立つ．

［Step 2］ 今，ある $k-1$ 期間の最適化問題

$$J_{k-1}=E\left[\sum_{j=0}^{k-2}\{x^T(j+1)Qx(j+1)+u^T(j)Ru(j)\}\right] \tag{69}$$

に対して，式(22)～(31)が成り立っているものと仮定する．このとき，$t=1,2,\cdots,k-1$ の各時点で k 期までの $k-1$ 期間の最適制御則を適用したときの，式(69)の最小値は，

$$
\begin{aligned}
f_{k-1}(x(1),\,w(1))&=\min J_{k-1}\\
&=x^T(1)S_x(k-1)x(1)+x^T(1)S_{xw}(k-1)w(1)\\
&\quad+w^T(1)S_{xw}^T(k-1)x(1)+w^T(1)S_w(k-1)w(1)\\
&\quad+\mathrm{Const}(k-1)
\end{aligned} \tag{70}
$$

で与えられる．このとき，k 期間の最適化問題

$$J_k=E\left[\sum_{j=0}^{k-1}\{x^T(j+1)Qx(j+1)+u^T(j)Ru(j)\}\right] \tag{71}$$

を最小化する $u(0)$ を求めることを考えると，最適性の原理より，

$$
\begin{aligned}
J_k&=E[x^T(1)Qx(1)+u^T(0)Ru(0)\\
&\quad+f_{k-1}(x(1),\,w(1))]\\
&=E[\{Ax(0)+Bu(0)+CDw(0)+Cv(0)\}^TQ\\
&\quad\cdot\{A_x(0)+Bu(0)+CDw(0)+Cv(0)\}\\
&\quad+u^T(0)Ru(0)\\
&\quad+\{Ax(0)+Bu(0)+CDw(0)\\
&\quad+Cv(0)\}^TS_k(k-1)\\
&\quad\cdot\{Ax(0)+Bu(0)+CDw(0)+Cv(0)\}\\
&\quad+\{Ax(0)+Bu(0)+CDw(0)+Cv(0)\}^T\\
&\quad\cdot S_{xw}(k-1)\{Dw(0)+v(0)\}\\
&\quad+\{Dw(0)+v(0)\}^TS_{xw}^T(k-1)\\
&\quad\cdot\{Ax(0)+Bu(0)+CDw(0)+Cv(0)\}\\
&\quad+\{Dw(0)+v(0)\}^TS_w(k-1)\{Dw(0)+v(0)\}\\
&\quad+\mathrm{Const}(k-1)]
\end{aligned} \tag{72}
$$

となり，さらに Step 1 と同様に $u(0)$ に関して二次形式になるように変形し，式(23)，(24)の $F(m)$, $K(m)$, 及び式(28)～(31)を $m=k$ として用いると，

$$
\begin{aligned}
J_k&=\{u(0)+F(k)x(0)+K(k)w(0)\}^T\\
&\quad\cdot\{R+B^T(Q+S_x(k-1))B\}\\
&\quad\cdot\{u(0)+F(k)x(0)+K(k)w(0)\}\\
&\quad+x^T(0)S_x(k)x(0)+x^T(0)S_{xw}(k)w(0)\\
&\quad+w^T(0)S_{xw}^T(k)x(0)+w^T(0)S_w(k)w(0)\\
&\quad+\mathrm{Const}(k)
\end{aligned} \tag{73}
$$

と表される．したがって，$\{R+B^T(Q+S_x(k-1))B\}$ が正定値行列であることから，式(73)を最小化する制御入力 $u(0)$ は，

$$u(0)=-F(k)x(0)-K(k)w(0) \tag{74}$$

であり，評価関数の最小値 $f_k(x(0),\,w(0))$ は，

$$
\begin{aligned}
&f_k(x(0),\,w(0))\\
&=x^T(0)S_x(k)x(0)+x^T(0)S_{xw}(k)w(0)\\
&\quad+w^T(0)S_{xw}{}^T(k)x(0)+w^T(0)S_w(k)w(0)\\
&\quad+\mathrm{Const}(k)
\end{aligned} \tag{75}
$$

で与えられる．したがって $m=k$ 期間の最適制御問題に対しても，式(22)～(31)は成り立つ．

以上，Step 1，Step 2 から，数学的帰納法により，任意の m 期間の最適制御問題に対して，式(22)～(31)が成り立つ． □

付録2　補題1の証明

マトリクス $\tilde{A}, \tilde{B}$ を，

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} A & CD \\ O & D \end{pmatrix} \tag{76}$$

$$\tilde{B}=\begin{pmatrix} B \\ O \end{pmatrix} \tag{77}$$

とおくと，式(28)～(30)をまとめて，

$$
\begin{aligned}
P(m)&=\tilde{A}^T[P(m-1)-P(m-1)\\
&\quad\cdot\tilde{B}\{R+\tilde{B}^TP(m-1)\tilde{B}\}^{-1}\tilde{B}^TP(m-1)]\tilde{A}+M
\end{aligned} \tag{78}
$$

とリカッチ方程式の形で記述できる．したがって，マトリクス $P(m)$ は単調非減少行列である〔23〕． □

付録 3　補題 2 の証明

式(78)の $P(m)$ は，$\tilde{A}-\tilde{B}L$ が漸近安定となるような行列 L が存在すれば，上に有界である〔23〕が，$\tilde{B}$ の $n+1$ 行目以下がゼロ行列であるため，任意の $\tilde{A}$ に対して漸近安定となる行列は存在しない．しかし，$\tilde{A}$ の要素である D が定常安定であるという条件のもとでは，次のようにシステムの定常安定性が示される．

まず，$(B, A), (B, CD)$ が可安定対であれば，$A-BL_1, CD-BL_2$ が漸近安定となるように，L_1, L_2 を選ぶことができる．

一方，D が漸近安定な行列であれば，$w(t)$ は定常安定な確率過程である．このとき，$w(t)<\infty$ であるから，$(CD-BL_2)w(t)<\infty$ となり，L_1,L_2 を用いた制御系

$$x(t+1)=(A-BL_1)x(t)+(CD-BL_2)w(t)+Dv(t) \tag{79}$$

もやはり漸近安定になる．したがってこのとき，

$$\sum_{k=t+1}^{\infty} E[x^T(k)Qx(k)]<\infty \tag{80}$$

であり，$u(t)=-L_1x(t)-L_2w(t)$ であるから，

$$\sum_{k=t}^{\infty} E[u^T(k)Ru(k)]<\infty \tag{81}$$

である．L_1, L_2 を用いた制御系の m 期間の評価関数を

$$f_{mL}=\sum_{k=t}^{m+t-1} E\{x^T(k+1)Qx(k+1)+u^T(k)Ru(k)\} \tag{82}$$

とすれば，定義より，

$$f_m(x(t), w(t))\leqq f_{mL} \tag{83}$$

であり，f_{mL} は $m\to\infty$ で収束するから，

$$f_m(x(t)w(t))=(x^T(t)w^T(t))P(m)(x(t), w(t)) \tag{84}$$

を考慮すれば，任意の初期値 $P_0\geqq 0$ に対し，系列 $P(m)$ は有界である　□

付録 4　定理 4 の証明

式(38)～(40)の解の存在は定理 2 より明らかである．定常の制御系は，閉ループの形で，

$$x(t+1)=(A-BF)x(t)+(CD-BK)w(t)+Cv(t) \tag{85}$$

とかけるので，この系の安定性は，$(A-BF)$ と $(CD-BK)$ の漸近安定性によって保証される．

ところで，式(76)，(77)において，$(B, A), (B, CD)$ が可安定，D が漸近安定であることから，$(\tilde{A}, \tilde{B})$ も可安定である．したがって，定常制御システムを

$$\begin{pmatrix} x(t+1) \\ w(t+1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & CD \\ O & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ w(t) \end{pmatrix} -\begin{pmatrix} B \\ O \end{pmatrix}(F\ K)\begin{pmatrix} x(t) \\ w(t) \end{pmatrix} +\begin{pmatrix} Cv(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \tag{86}$$

と記述すると，

$$(FK)=[R+\tilde{B}^T\{M+P\}\tilde{B}]^{-1}\tilde{B}^T\{M+P\}\tilde{A} \tag{87}$$

とかける．ただし，P は，

$$P=\tilde{A}^T[P-P\tilde{B}\{R+\tilde{B}^TP\tilde{B}\}^{-1}\tilde{B}^TP]\tilde{A}+M \tag{88}$$

の解である．このとき，式(88)は定常リカッチ方程式の形をしているので，$(\tilde{A}, \tilde{B})$ が可安定であるとき，式(86)のフィードバック制御系は漸近安定となり，式(88)の解は一意的である〔23〕．これは，$(A-BF)$ と $(CD-BK)$ がともに漸近安定であり，式(38)～(40)の解は一意的に存在することを示している．　□