J Jpn Ind Manage Assoc **50**, 207-215, 1999

Original

A Study of Periodical Ordering System to Control the Cost Occurred from Variances

Jun NISHIJIMA[1], Masayuki GOTO[2] and Nobuhiko TAWARA[3]

Abstract

For production-inventory systems based on periodical ordering systems, it is important to control variances in order quantity and inventory. Therefore, a periodical ordering system based on optimal control theory has been proposed. The criterion of the ordering system is the weighted summation of those variances. The formula of order minimizes the criterion, and optimal order quantity can be calculated for every period. However, it is rational for the ordering system to minimize the cost function in practice. If variance in inventory is large, then a shortage or remainder of inventory would occur and inventory cost would rise. If variance in order quantity is large, then production loss and extra production costs would rise. In this paper, we formulate a periodical ordering system minimizing the cost function that depends on variances in order quantity and inventory. We show a method for searching the formula to calculate the optimal order quantity. This solution is based on optimal control theory for a linear system with colored noise.

Key words: periodical ordering systems, ordering quantity variances, final inventory variances, optimal control theory

---

[1] NK-EXA Corporation
[2] Waseda University
[3] Musashi Institute of Technology
Received: April 10, 1998
Accepted: March 25, 1999

論　　文

在庫量・発注量変動により発生するコストを制御する定期発注方式に関する研究

西　嶋　　淳[1]，後　藤　正　幸[2]，俵　　信　彦[3]

生産―在庫システムにおいては，安全在庫量低減のため期末在庫量変動を低く抑え，生産水準安定のために発注量変動をも低く抑えることが重要である．このことから，期末在庫量・発注量変動を期末在庫量・発注量分散として捉え，この両分散を制御する生産―在庫システムの研究がなされている．しかし，期末在庫量が変動することにより，安全在庫量分の在庫保管費用や品切れ損失費用などが余計に発生すると考えられ，また，発注量が変動すると生産量が変動することになり，増産体制を敷いて生産を行うための費用や，遊休損失費用などが発生してくるといえることから，本来評価関数はこれらのコストの関数となるべきと考えられる．よって本稿において，"有色雑音を持つ確率システムに対する最適制御則を導入した定期発注方式" において重み付け係数を適正に決定することで，期末在庫量・発注量変動により発生するコストの最小化が可能であることを示す．

キーワード：定期発注方式，発注量分散，在庫量分散，最適制御理論

1. はじめに

生産―在庫システムにおいては，安全在庫量低減のため期末在庫量変動を低く抑え，生産水準安定のために発注量変動をも低く抑えることが重要である〔1〕．このことから，期末在庫量・発注量変動を期末在庫量・発注量分散として捉え，この両分散を制御する生産―在庫システムの研究がこれまでに多くなされてきた〔1〕～〔5〕．しかし，期末在庫量が変動すれば，安全在庫量分の在庫保管費用や品切れ損失費用などが発生し，発注量が変動すれば，時間外生産費用や遊休損失費用などが発生することから，本来評価関数はこれらのコストの関数となるべきと考えられる．

一方，期末在庫量・発注量の両変動を制御する定期発注方式を最適制御理論の枠組みで捉え，最適な発注量の算出式を導出した研究がある〔5〕．これはより一般的な枠組みとして "有色雑音を持つ線形システムに対する最適制御則（**注 1**）" として定式化でき，これによりリードタイムの一般化や多段階在庫システムを扱うことも可能となっている．この発注方式は，自己相関を持つ需要系列に対して，期末在庫量分散・発注量分散を需要量分散で標準化した分散比の重み付け和を評価関数とし，これを最小化する最適発注量を算出することができる．また，この発注方式では，評価関数上の重み付け係数を変動させることにより，期末在庫量分散および発注量分散のトレードオフを議論することが可能であり（**注 2**），さらに両分散の期待値は重み付け係数，需要情報から算出可能である．

本稿では以上の特性を生かして，新たな評価基準として両変動により発生するコストを期末在庫量・発注量分散の関数として定式化し，これを最小化するような重み付け係数を算出する．このように決定された重み付け係数から得られるフィードバックゲインを用いて発注を行うことにより，コストを最小化する発注方式が与えられる．本稿の目的は，"最適制御則に基づく最適な定期発注方式" において重み付け係数を適正に決定することにより，期末在庫量・発注量変動によるコストの最小化が可能であることを示すことである．

2. 対象モデルと最適制御

本稿では定期発注方式〔5〕，〔6〕を研究対象とし，期末在庫量・発注量変動により生じるコストを最小化することを目的とする．

2.1　モデルの前提条件

（1）期末発注，期首納入の定期発注方式を採用する工程を対象とする．

（2）市場の需要系列は定常時系列とする．

（3）品切れが生じた場合は受注残になる．したがって，形式上は期末在庫量が負になることも許される．

（4）一回分の発注量に制限はない．

---

[1] 株式会社 エヌ・ケー・エクサ
[2] 早稲田大学
[3] 武蔵工業大学
受付：1998 年 4 月 10 日，再受付（2 回）
受理：1999 年 3 月 25 日

2.2 対象モデル

本稿では，次式で表される定期発注モデルを解析対象とする．t 期における期末在庫量を $I(t)$，発注量を $O(t)$，需要量を $d(t)$，リードタイムを L，安全在庫水準を SI とすると，在庫の構造式は

$$I(t+1)=I(t)+O(t-L+1)-d(t+1) \tag{1}$$

で与えられる〔1〕．

市場の需要系列は，指数型自己相関を持つ定常時系列とし，その構造は1次の自己回帰（AR）モデルで与えられるものとする．この需要モデルは従来から多くの研究で仮定されてきた系列である〔1〕〜〔5〕．このとき，需要の期待値を μ_D，指数型自己相関係数を λ とする需要系列は

$$d(t+1)-\mu_D=\lambda\{d(t)-\mu_D\}+v(t) \tag{2}$$

で表現できる．ただし，$v(t)$は $N(0,\sigma_v^2)$に従う正規白色雑音とする．このとき，需要の定常分布も正規分布である〔4〕．

問題は，何らかの評価関数のもとで各期の発注量 $O(t)$を算出することであり，本稿では評価関数として，期末在庫量・発注量の両変動により生じるコストを採用する．

2.3 最適制御に基づく発注方式

ここでは，後で示すように本稿の解析に本質的となる最適制御理論に基づく発注方式を示す．さらにリードタイムの相違によるコストへの影響についても考慮するため，むだ時間概念〔7〕を用いリードタイム拡張も行う．

2.3.1 リードタイム＝1の場合

研究対象の在庫構造式(1)式は，(2)式とあわせて，以下のような状態方程式として表すことができる．

$$\begin{aligned}x_1(t+1)=&A_1x_1(t)+B_1u_1(t)\\&+C_1D_1w_1(t)+C_1v(t)\end{aligned} \tag{3}$$

ただし

$$\begin{aligned}&x_1(t)=I(t)-SI\\&u_1(t)=O(t)-\mu_D\\&w_1(t)=d(t)-\mu_D\\&A_1=1, B_1=1, C_1=-1, D_1=\lambda\end{aligned} \tag{4}$$

である．

ここで，評価関数を需要量分散 $\sigma_D{}^2$ に対する分散比の重み付け和 $\frac{1}{\sigma_D{}^2}\{qV(I)+rV(O)\}=qW(I)+rW(O)$ とする．ただし，$W(I)=V(I)/\sigma_D{}^2$，$W(O)=V(O)/\sigma_D{}^2$ であり，$V(I)$は期末在庫量分散，$V(O)$は発注量分散，q，r は期末在庫量・発注量のどちらを強く制御するかを決める重み付け係数である．この評価関数の最小化は $E[I(t)]=SI$，$E[O(t)]=\mu_D$ の制約をおいて最小化することによって得られる．すなわち，これらの式を満たさないときは，$(E[I(t)]-SI)^2$，$(E[O(t)]-\mu_D)^2$ だけ分散が増えるので，考慮する必要がない．したがって，評価関数は

$$J=\frac{1}{\sigma_D{}^2}E[qx_1(t)^2+ru_1(t)^2] \tag{5}$$

と設定でき，文献〔5〕に基づいて最適解を導出することができる．この(5)式を最小とする発注量は次式となることが知られている〔5〕．

$$O(t)=\mu_D-Fx_1(t)-Kw_1(t) \tag{6}$$

$$F=\frac{q+\sqrt{q^2+4qr}}{2r+q+\sqrt{q^2+4qr}} \tag{7}$$

$$K=\frac{-\lambda\{q+\sqrt{q^2+4qr}\}}{2r(1-\lambda)+q+\sqrt{q^2+4qr}} \tag{8}$$

以下，この発注方式を（リードタイムが1の場合の）最適制御則に基づく発注方式と呼ぶ．また，以上の発注方式を用いた場合の期末在庫量分散の期待値 $E[V(I)]$，発注量分散の期待値 $E[V(O)]$ は，フィードバックゲイン F，K および需要情報により，数式解として求めることができる．

2.3.2 リードタイム＝L の場合（$L\geq 2$）

リードタイム＝L の場合の在庫構造式は

$$\begin{aligned}\{I(t+1)-SI\}=&\{I(t)-SI\}\\&+\{O(t-L+1)-\mu_D\}\\&-\lambda\{d(t)-\mu_D\}-v(t)\end{aligned} \tag{9}$$

と表すことができる．

ここで，最適制御則を利用するために，この在庫構造式を以下に示すような，入力に $(L-1)$ のむだ時間要素を含む状態方程式へと変形を行う．

$$\begin{aligned}x_L(t+1)=&A_Lx_L(t)+B_Lu_L(t)\\&+C_LD_Lw_L(t)+C_Lv(t)\end{aligned} \tag{10}$$

ただし

$$x_L(t)=\begin{pmatrix}I(t)-SI\\O(t-L)-\mu_D\\O(t-L+1)-\mu_D\\\vdots\\\vdots\\Q(t-1)-\mu_D\end{pmatrix}\in R^{(L+1)\times 1} \tag{11}$$

$$u_L(t)=O(t)=\mu_D \tag{12}$$

$$w_L(t)=d(t)-\mu_D \tag{13}$$

$$A_L=\begin{pmatrix}1&0&1&0&\cdots&\cdots&0\\0&0&1&0&\cdots&\cdots&0\\0&0&0&1&\cdots&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&\vdots&\vdots&&\ddots&\ddots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&&\ddots&1\\0&0&0&\cdots&\cdots&\cdots&0\end{pmatrix}\in R^{(L+1)\times(L+1)}\tag{14}$$

$$B_L=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}\in R^{(L+1)\times 1},\tag{15}$$

$$C_L=\begin{pmatrix}-1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\in R^{(L+1)\times 1}\tag{16}$$

$$D_L=\lambda\tag{17}$$

である．

評価関数をリードタイム=1の場合と同様，需要量分散で基準化した期末在庫量・発注量の両分散の重み付け和に設定するには，以下のようにすればよい．

$$Q=\begin{pmatrix}q&0&\cdots&0\\0&0&&\vdots\\\vdots&&\ddots&\vdots\\0&\cdots&\cdots&0\end{pmatrix}\in R^{(L+1)\times(L+1)}\tag{18}$$

$$R=r\tag{19}$$

$$J=\frac{1}{\sigma_D{}^2}E[x_L^T(t)Qx_L(t)+Ru_L(t)^2]\tag{20}$$

この J の最小化は，$qW(I)+rW(O)$ の最小化と等価である．

また，ここで (B_L, A_L)，(B_L, C_LD_L) は可安定対であるので，評価関数 J を最小とする定常安定解が存在する．この(20)式を最小とする発注量は以下のように求められる．

$$O(t)=\mu_D-Fx_L(t)-Kw_L(t)\tag{21}$$

ただし，フィードバックゲイン F，K の数式解は，文献〔5〕に基づいて計算される．以下，この発注方式を（リードタイムが L の場合の）最適制御則に基づく発注方式と呼ぶ．ここで，在庫構造式である(9)式に対し，文献〔5〕の最適な数式解を適用すると，F は $1\times(L+1)$ 行列，K は 1×1 の行列（スカラ）となる．したがって，リードタイム=1の場合のように F，K の数式解を得ることが困難となる．また，同様の理由から，両分散の期待値 $E[V(I)]$，$E[V(O)]$ も数式解を得ることが困難となっている．よって，本研究においては，フィードバックゲイン F，K および両分散の期待値 $E[V(I)]$，$E[V(O)]$ は数値計算によって求めることとする．

3. 在庫量・発注量変動により発生するコスト

本稿では，期末在庫量・発注量の両変動により生じるコストを考える〔8〕．そこでまず，期末在庫量・発注量変動によりかかるコストを両分散の関数として定式化する．ただし，以下の $P(x)$ は標準正規分布における x 以上となる確率とする．

$$P(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^\infty \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)du\tag{22}$$

3.1 期末在庫量変動により発生するコスト

まず，各期の期末在庫量の分布について考える(**図1**)．

ここで需要分布が正規分布であるので，各期の期末在庫量も正規分布に従う．通常，その分散 $\sqrt{V(I)}$ を考慮して，品切れ確率を $P(\alpha)$ とする安全在庫水準を設定する．安全係数 α を標準正規分布のパーセント点とすると，安全在庫水準 SI は，$\alpha\sqrt{V(I)}$ となる．このように安全在庫水準を設定すると期末在庫量の分布は $N(\alpha\sqrt{V(I)}, \sqrt{V(I)}^2)$ の正規分布となる．以上のように安全在庫を設定することとすると，毎期 $\alpha\sqrt{V(I)}$ 個だけ多く在庫を持つこととなり，コストが掛かってくる，またこの安全在庫を持ったとしても，$P(\alpha)$ の確率で品切れが起こり，品切れ損失が発生すると考えられる．

よって本稿では上記のように安全在庫水準を設定するものとし，期末在庫量変動によるコストとしては，“安全在庫保管費用”と“品切れ損失費用”の2つを考えることとする．

さらに，ここで期末在庫量の確率分布を $f(I)$ とし，

$$f(I)=\frac{1}{\sqrt{2\pi V(I)}}\exp\left(-\frac{(I-\alpha\sqrt{V(I)})^2}{2V(I)}\right)\tag{23}$$

と表しておく．

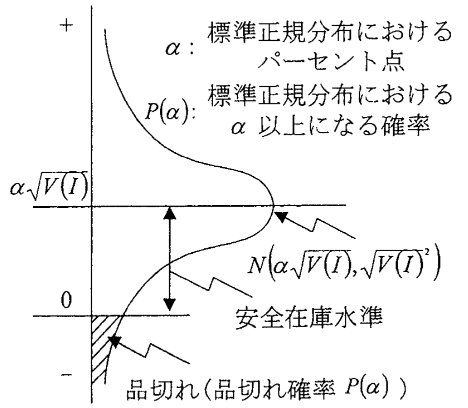

図1 各期の期末在庫量分布

3.1.1 安全在庫保管費用

品切れ確率を $P(\alpha)$ とする安全在庫水準 SI は

$$SI=\alpha\sqrt{V(I)} \tag{24}$$

となる．ここで，単位期間・単位数量あたりの在庫保管コストが a(円)であるとすると，単位期間あたりの安全在庫保管費用の期待値 CSI は

$$CSI=a\times\alpha\sqrt{V(I)} \tag{25}$$

となる．

3.1.2 品切れ損失費用

各期の品切れ数量の期待値 SL は，期末在庫量の確率分布 $f(I)$ を用いて

$$SL=\int_{-\infty}^{0}\{(-I)\cdot f(I)\}dI \tag{26}$$

と表すことができる．

ここで，単位数量あたりの品切れ損失コストが b(円)であるとすると，単位期間あたりの品切れ損失費用の期待値 CSL は

$$\begin{aligned}CSL&=b\times\int_{-\infty}^{0}\{(-I)\cdot f(I)\}dI\\&=b\times\left\{\sqrt{\frac{V(I)}{2\pi}}\exp\left(-\frac{\alpha^2}{2}\right)\right.\\&\qquad\left.-\alpha\sqrt{V(I)}\times\mu(\alpha)\right\}\end{aligned} \tag{27}$$

となる．

3.2 発注量（生産量）変動により発生するコスト

工程において，発注量が変動するとこれはそのまま生産量が変動することにつながる．まず各期の生産量分布について考える(図2)．

需要分布が平均 μ_D の正規分布であれば，各期の生産量分布は正規分布 $N(\mu_D,\sqrt{V(O)}^2)$ に従う．また，通常工程にはある一定の生産能力値 β があると考えられる．この β を超えるような生産量が要求された場合，人員を増員したり時間外生産を行うなどの増産体制に切り替えて生産を行うことになる．このとき，工程においては特別生産費用がかかる（注3）．逆にこの生産能力値を下回るような生産量が要求された場合，工程には遊休が発生し，損失コストがかかる．このコストを“遊休損失費用”と呼ぶことにする．

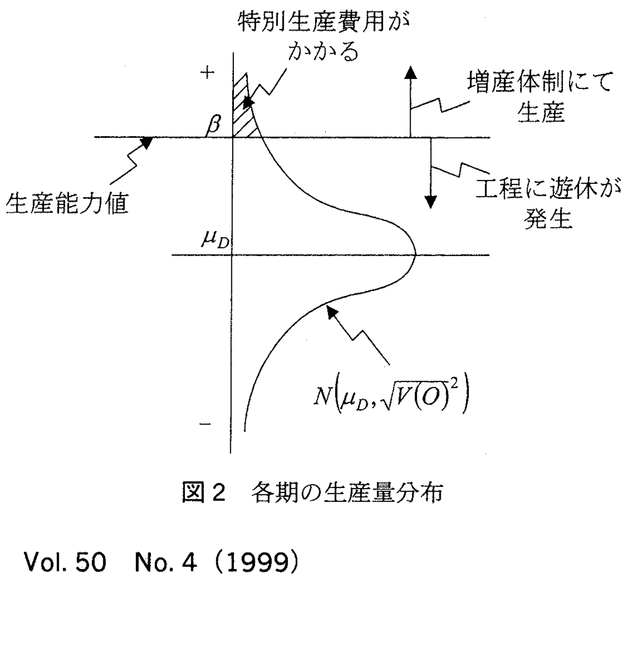

図2 各期の生産量分布

よって，発注量変動（生産量変動）によるコストとして，“特別生産費用”と“遊休損失費用”の2つを考慮することとする．

さらに，ここで発注量（生産量）の確率分布を $f(O)$ として

$$f(O)=\frac{1}{\sqrt{2\pi V(O)}}\exp\left(-\frac{(Q-\mu_D)^2}{2V(O)}\right) \tag{28}$$

と表しておく．

3.2.1 特別生産費用

生産能力の超過は発注量が β を越えるときに生じるので，各期の生産能力超過数量の期待値 OP は，発注量（生産量）の確率分布 $f(O)$ と生産能力値 β を用いて

$$OP=\int_{\beta}^{\infty}\{(O-\beta)\cdot f(O)\}dO \tag{29}$$

と表すことができる．

ここで，単位生産能力超過数量あたりの特別生産コストが c 円であるとすると，単位期間あたりの特別生産費用の期待値 COP は

$$\begin{aligned}COP&=c\times\int_{\beta}^{\infty}\{(O-\beta)\cdot f(O)\}dO\\&=c\times\left\{\sqrt{\frac{V(O)}{2\pi}}\exp\left(-\frac{(\beta-\mu_D)^2}{2V(O)}\right)\right.\\&\qquad\left.+(\mu_D-\beta)\times P\left(\frac{\beta-\mu_D}{\sqrt{V(O)}}\right)\right\}\end{aligned} \tag{30}$$

となる．また，$c\geq b$，つまり無理に生産を行うよりも品切れを発生させたほうがコストが少ない場合には，（本稿ではコスト最小化という目的を考えているので）特別生産費用を0として，COP を品切れ損失費用へ計上する．これは，$c=b$ として同様の解析を行うことと等価である．

3.2.2 遊休損失費用

各期の遊休分の数量（β までの数量）の期待値 PL は，発注量（生産量）の確率分布 $f(O)$ を用いて

$$PL=\int_{-\infty}^{\beta}\{(\beta-O)\cdot f(O)\}dO \tag{31}$$

と表すことができる．

ここで，単位数量あたりの遊休損失コストが d 円であるとすると，単位期間あたりの遊休損失費用の期待値 CPL は

$$\begin{aligned}CPL&=d\times\int_{-\infty}^{\beta}\{(\beta-O)\cdot f(O)\}dO\\&=d\times\left\{\sqrt{\frac{V(O)}{2\pi}}\exp\left(-\frac{(\beta-\mu_D)^2}{2V(O)}\right)\right.\end{aligned}$$

$$+(\beta-\mu_D)\times P\left(\frac{\beta-\mu_D}{\sqrt{V(O)}}\right)\Bigg\} \tag{32}$$

となる．

4. 両変動により発生するコストの最小化

以上のコスト設定により，単位期間あたりの期末在庫量・発注量変動による総コストの期待値 CT を

$$CT=CSI+CSL+COP+CPL \tag{33}$$

とする．本稿の目的はこのコストを最小化する発注式を算出することである．ここで，CT は期末在庫量分散 $V(I)$・発注量分散 $V(O)$ に対して明らかに増加関数の関係にある．このことを利用して，次の定理を導くことができる．

定理 1　コスト関数 CT の最小化は，最適制御則に基づく発注方式を用いて，評価関数上のウエイト q，r を最適化することにより与えられる．

(証明)　コスト関数 CT は，期末在庫量分散 $V(I)$・発注量分散 $V(O)$ の関数として表され，両分散の増加に対し単調増加である．一方，最適制御に基づく発注方式は，一方の分散を固定したときの他方の分散の最小値を与えている．従って，明らかに定理が成り立つ．

この定理により，(あらゆる方法の中で) コスト関数を最小化する解は，両分散の重み付け和に対する最適制御則において，ウエイト q，r を総コストに対して最適化することによって与えられることがわかる．すなわち，この最適制御を用いた発注方式のみを議論し，その制約の中でコスト関数を最小化すればよく，これより厳密にコストを小さくする発注方式は他に存在しない (同じ総コストを達成する発注方式が他に存在するかどうかについては，コスト最小化の観点からは議論する必要はない)．よって，以下では最適制御則に基づく発注方式において，コスト関数を最小化する q，r を求めることにする．これにより与えられる解は，コスト関数に関して最適である．具体的には，両分散の期待値 $E[V(I)]$，$E[V(O)]$ は評価関数上のウエイト q，r の関数として表され，このウエイトの組み合わせにより両分散は可変制御が可能となっていることから，この q，r を変化させた場合の両分散の期待値を CT 内の期末在庫量分散 $V(I)$ と発注量分散 $V(O)$ にそれぞれ代入し，この挙動を調べる．この結果から CT を最小にするウエイトがある一点で存在すれば，この最適ウエイトを用いた最適制御発注方式は両変動により生じるコストを最小化する発注方式となる．

ここで，両変動による総コストの期待値 CT 内には安全係数 α，生産能力値 β というパラメータが存在する．よって，まず解析 I として，α，β が設定情報として与えられる場合，つまり在庫スペースに制限があり，保持できる安全在庫水準がある程度決まっている場合や，現在工程が稼働中で生産能力値の設定変更が困難な場合などを想定した数値解析を行う．次に解析 II として，α，β についても最適化する場合，つまり在庫スペースには特に制限がなく，需要がある程度予測できる製品のラインを新たに設計する場合などを想定した数値解析を行うこととする．

4.1 数値解析 I

以下に，需要平均 μ_D，需要標準偏差 σ_D，自己相関係数 λ，単位期間・単位数量あたりの各コスト (在庫保管費 a，品切れ損失費 b，特別生産費 c，遊休損失費 d)，安全係数 α，生産能力値 β，リードタイム L を

需要情報	$\mu_D=1000$，$\sigma_D=20$	
	$\lambda=0.2$，0.4，0.6，0.8	
設定情報	$(a, b, c, d)=(1, 20, 18, 6)$	
	$\alpha=1.65$，$\beta=1030$	
リードタイム	$L=1, 2, 3$	

とした場合のウエイトの変動によるコスト関数 CT の挙動をグラフ化して示す(図 3〜5)．

ただし，ウエイト q，r の絶対的大きさには意味がないことから，ウエイトは比の形 q/r として解析を行う．

需要情報，設定情報の様々な組合わせについて解析した結果，どのような場合においてもコスト関数 CT はある一点のウエイト比 q/r で最小値を持つという挙動を示す．よって，最適制御発注方式において今回のように数値解析により最適ウエイト比を探索し，このウエイト比から求められるフィードバックゲイン F，K を用いることで，在庫量・発注量変動によるコストを最小とする最適発注量を得ることができる．

また，**図 3** より，リードタイムが 1 (即納) の場合は自己相関が強い場合または弱い場合にコストは小さくなり，中間的状況においてはコストが多くかかることがわかる．一方，**図 4**，**5** より，リードタイムが 2，3 となると，自己相関が 0.8 と強くても総コストは大きな値をとっている．

リードタイムが 1 の場合を考える．自己相関が弱い場合，発注量分散と在庫量分散のトレードオフ関係について従来 (文献〔5〕，**図 1** 参照) から知られているように，(需要の誤差分散 σ_v^2 の値が相対的に大きいので) 発注量分散を小さく制御しても，在庫量分散の増加はゆるやかである．したがって，このとき発注

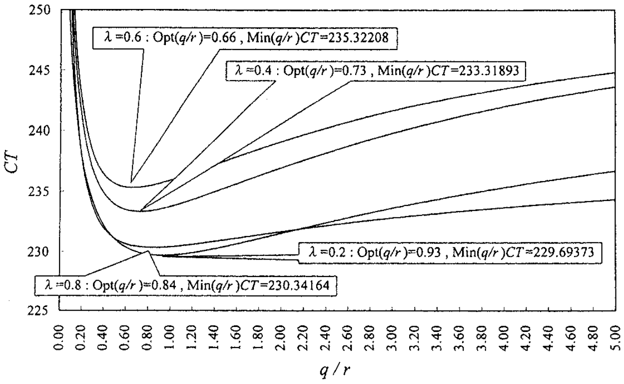

図3　ウエイトの変動による CT の挙動（L=1）

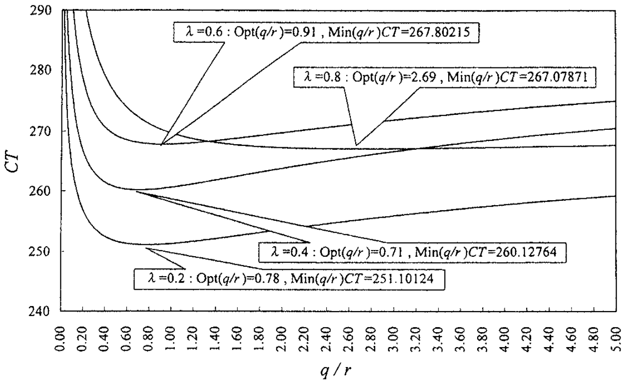

図4　ウエイトの変動による CT の挙動（L=2）

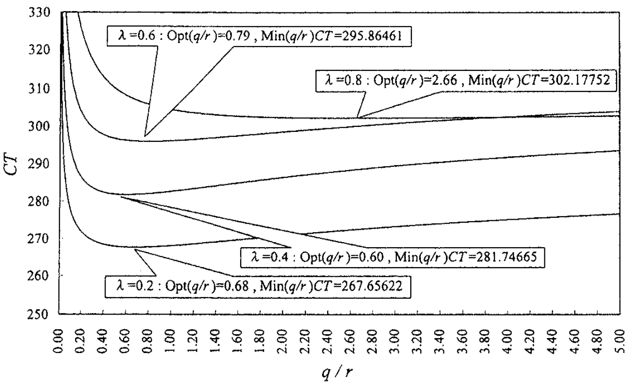

図5　ウエイトの変動による CT の挙動（L=3）

量分散を小さく制御することで，発注量分散によって生ずるコストも下がるが，在庫量分散によって生ずるコストはそれほど増加せず，結果的に総コストは小さい値をとる．自己相関が強い場合には，需要の不確定要素である σ_v^2 の値が相対的に小さいため，各期の発注量を需要に追従させることにより，在庫量分散は非常に小さく制御可能となる．よって，このとき発注量分散をある程度大きくとっても，それ以上に在庫量分散が小さくなり，総コストは小さい値をとる．しかし，自己相関が強いとも弱いともいえない中間的な状況においては，在庫量分散と発注量分散の一方をある程度に保ちながら，他方を非常に小さく制御することはできない．どちらかを強く制御しようとすると，他方の分散が大きくなってしまう．よってこのとき，総コストも大きめの値をとるものと思われる．

リードタイムが2以上の場合，需要の自己相関が小さい場合には即納の場合と同様のことがいえる．しかし，リードタイムを考慮したことから在庫量の挙動に発注残の影響が入り，その分，自己相関が強い場合でも在庫量変動を小さく制御することが難しくなる．すなわち，リードタイムが長くなると先の需要を考慮して発注することになるが，先の需要ほど不確定要素が増す．例えば，k 期先の需要 $d(t+k)$ と $d(t)$ の自己相関は λ^k となり，一般に λ より小さくなるので，リードタイム1の場合に比べ，需要の自己相関が非常に高くならないと在庫量変動を小さく制御できなくなる．すなわち，リードタイム1の場合に比べ，発注量分散を大きくとっても在庫量分散の値はあまり下がらない．したがって，λ=0.8 の場合，リードタイム1の場合は在庫量分散を小さく制御できたので総コストも小さくなったが，リードタイムが長くなると需要の不確定要素が増えて在庫量分散を小さく制御できず，結果として総コストも小さくできないことがわかる．

また，以上の両分散値の相乗効果により，自己相関の相違によるコスト関数の挙動の変化は，リードタイムが大きくなれば大きくなるほど，即納の場合よりも顕著になると考えられる．

4.2　数値解析 II

本節では，安全係数 α，生産能力値 β についても最適化を行うような場合を考慮するため，α，β を変動させ，それぞれの α，β について，数値解析 I と同様の方法で，ウエイト比による最小コスト $\mathrm{Min}(q/r)CT$ をグラフ化し，最適な α，β を探索することとする．

設定情報は数値解析 I と同様とした．以下では，需要の自己相関係数 λ=0.6 に固定した場合のウエイト比 q/r による最小コスト $\mathrm{Min}(q/r)CT$ の挙動をグラフ化して示す(図6～8)．

需要情報，設定情報の様々な組み合わせについて解析した結果，どのような場合においてもこれまで示した結果と同様にコスト関数 $\mathrm{Min}(q/r)CT$ はある一点の α，β で最小値を持つという挙動を示す事が明らかになった．よって，今回のような数値解析から最小値を探索することで，各設定値による最適安全係数，最適生産能力値を決定できるといえる．

また，最適安全係数 $\mathrm{Opt}(\alpha)$ は，需要平均，需要標準偏差，需要自己相関係数，単位期間・単位数量あたりの特別生産費および遊休損失費，リードタイムの相

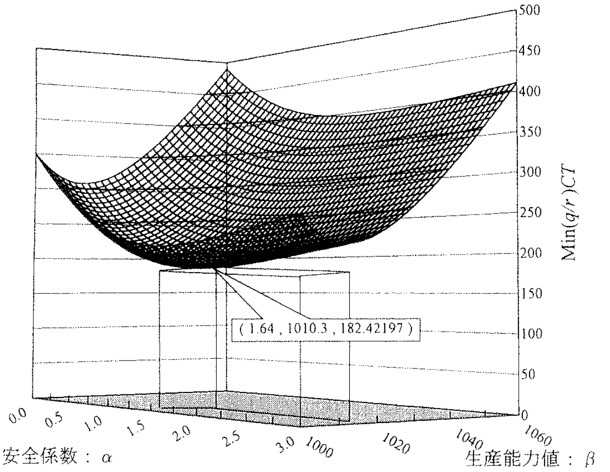

図6　α, β による Min(q/r)CT の挙動 (L=1)

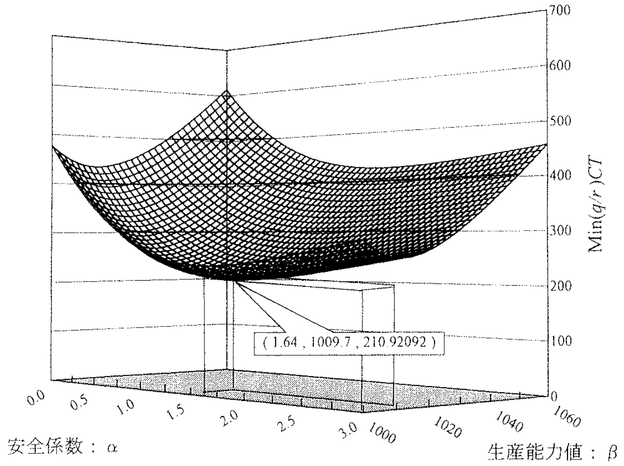

図7　α, β による Min(q/r)CT の挙動 (L=2)

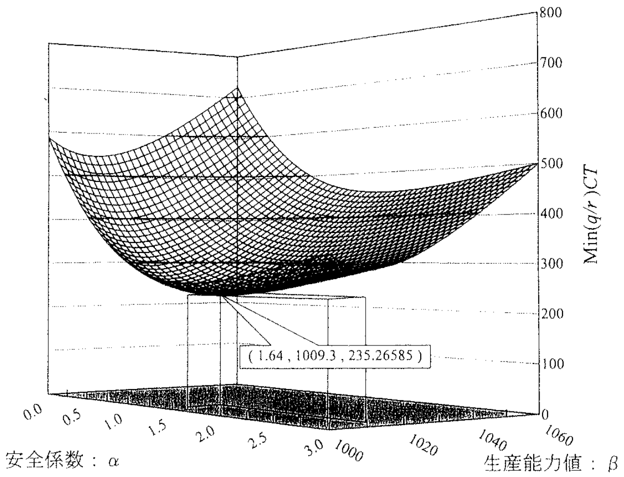

図8　α, β による Min(q/r)CT の挙動 (L=3)

違によってはほとんど変動せずに単位期間・単位数量あたりの在庫保管費用 a と品切れ損失費用 b との関係のみによってほぼ決定できることが示された.

以下に, a, b と最適安全係数および, そのときの品切れ確率の関係を示す.

表1　最適安全係数

a : b	Opt(α)	品切れ確率 $P(\alpha)$
1： 3	0.45	0.3264
1： 5	0.85	0.1977
1：10	1.30	0.0968
1：15	1.50	0.0668
1：20	1.64	0.0505

しかし, 最適生産能力値については, 設定情報のすべてに影響を受けて変動する. よって, 最適安全係数のように決定することが困難なため, 今回のような解析結果を探索することによって求めることとなる.

5. 結　　　論

本稿では, “最適制御理論に基づく定期発注方式” において, 評価関数上のウエイトを適切に決定することにより, 期末在庫量・発注量変動により生じるコストを最小化できることを示した.

注1　有色雑音は白色雑音に対する言葉であり, 線形システムに入る雑音が記憶を持つことを意味する. 有色雑音を扱うことにより, 需要系列に自己相関がある場合の在庫モデルに適用することができる.

注2　すなわち, 一方の分散をある値に設定したという条件のもとで, 他方の分散を最小化する発注量が求められている.

注3　もし, 生産能力値を越える需要は次期に繰り返す場合を考えるならば, この特別生産費用を “次期に生産し納入するためのコスト (タイムリーに納入できないことにより生じるコストを含む)” とみなし, 同様の解析を行えばよい.

参　考　文　献

〔1〕 十代田三知男：“定期発注システムにおける発注量および在庫量の変動に関する研究”, 学位論文, 早稲田大学 (1971)
〔2〕 平川係博：“生産計画規則の決定” 日本経営工学会誌, Vol. 26, No. 4, pp. 343-347 (1976)
〔3〕 俵　信彦, 増井忠幸, 鈴木晴久：“Z変換によるG型定期発注方式の解析—発注量と在庫量の制御に関する研究—”, 日本経営工学会誌, Vol. 41, No. 4, pp. 275-282 (1990)
〔4〕 後藤正幸, 内園みどり, 俵　信彦：“需要自己相関を考慮したFK型定期発注システムと従来システムとの統一的考察”, 日本経営工学会誌, Vol. 46, No. 6,

pp. 565-572 (1996)
〔5〕 後藤正幸, 内園みどり, 俵　信彦：“有色雑音を持つ線形システムの最適制御則と定期発注システムへの適用”, 日本経営工学会誌, Vol. 47, No. 2, pp. 107-116 (1996)
〔6〕 村松林太郎：“新版生産管理の基礎”, 国元書店 (1984)
〔7〕 荒木光彦, 桑田龍一, 藤中　透：“むだ時間システムに対するPID/PD制御および離散型最適制御”, システムと制御, Vol. 28, No. 5, pp. 278-289 (1984)
〔8〕 西嶋　淳, 後藤正幸, 俵　信彦：“在庫量・発注量変動によるコスト増を考慮した定期発注方式に関する研究”, 日本経営工学会平成9年度秋季研究大会予稿集, pp. 126-127 (1997)