J Jpn Ind Manage Assoc **53**, 368–377, 2002

Original

A Study on Weight Estimation of Analytic Hierarchy Process Using the Weighted Least Squares Method

Naoto MURAYAMA,[1] Masayuki GOTO [2] and Nobuhiko TAWARA [3]

Abstract

The analytic hierarchy process (AHP) proposed by T.L.Saaty is a method for decision making that takes into consideration uncertain situations or multiple evaluation criteria. In AHP, a decision maker gives values of paired comparisons between evaluation criteria and substitutive propositions. Saaty proposed the eigen vector method (EV method) to calculate evaluation values called weights of the substitutive propositions from a given pair-wise comparison matrix. On the other hand, logarithmic least square error method (LLS method) has been proposed. It is a technique that calculates weights of the substitutive propositions based on statistical theory. In the LLS, a linear logarithm model assumes an identical variance for noises and the logarithmic least square error method is applied to calculate the weights. This supposition seems to be useful in many practical cases. However, a pair comparative value depends on decision makers. In other words, there may exist the case such that "the pair comparative value between substitutive propositions A and B is more reliable than that between B and C" arise in practice. That is, when a paired comparison matrix is made, the reliability of each comparative pair may be different in the matrix. In this case, it is more suitable that we assume the noises with different variances in the log-linear model. In the conventional LLS, even if the reliability of each comparative pair is different in the matrix it cannot be used for the analysis. In this paper, we show a new method that takes into consideration the reliability of decision makers for each comparative pair value. We propose the weight estimation method of AHP based on a weighted least squares error method where weights represent the conviction of decision maker. If a decision maker can give a precise comparative pair value, then the proposed method is theoretically sound. Furthermore, from a simulation experiment, we examined the properties of the proposed method. We show that a better estimator than LLS can be acquired even if weights that are different from the right values calculated from true variances of noises.

Key words: AHP, decision making, least square error method

[1]Fuji Xerox Co.
[2]The University of Tokyo
[3]Musashi Institute of Thechnology
Received: March 28, 2000
Accepted: September 6, 2002

論　文

重み付き最小二乗法を用いたAHPのウエイト推定法に関する研究

村山直人[1], 後藤正幸[2], 俵　信彦[3]

階層分析法（AHP：Analytic Hierarchy Process）はSaatyにより提唱された，不確実な状況や多様な評価基準に基づく意思決定モデルである．AHPでは意思決定者が評価基準間や代替案間でそれぞれ一対比較を行い一対比較行列を作成する．その際，問題によっては，一対比較行列の中に意思決定者が自信のある値と自信のない値が生じることが考えられる．しかし，従来の評価基準や代替案の評価値（ウエイト）の算出法では，このような意思決定者の確信の度合い（確信度）を解析に取り入れることができなかった．本論文では，一対比較に対してその値の確信度が与えられる場合に，その情報も用いて評価値（ウエイト）を計算可能である方法を提案する．これは，対数線形モデルにおける重み付き対数最小二乗法による方法であり，統計理論的に整合性のある方法となっている．

キーワード： AHP，意思決定，最小二乗法，対数最小二乗法

1. はじめに

階層分析法（AHP：Analytic Hierarchy Process）はSaatyにより提唱された，不確実な状況や多様な評価基準に基づく意思決定モデルである〔1〕～〔5〕．AHPではまず，意思決定者が評価基準間や代替案間でそれぞれ一対比較を行い一対比較行列を作成する．この一対比較行列から評価基準や代替案の評価値（以下，ウエイト）を求める方法としてSaatyは，固有ベクトル法（EV法）を提唱している．一対比較行列からウエイトを推定する方法としては，固有ベクトル法の他，幾何平均法〔5〕,〔6〕，調和平均法〔7〕，一般平均法〔8〕,〔9〕などの方法が提案されており，現在も多くの研究がなされている．

これらのウエイト推定法は一対比較行列が完全に整合性を保っている場合には同一の結果を導く．差が生じるのは整合性が崩れた場合〔9〕～〔11〕であるが，どの方法が良いのかという疑問は極めて自然に生じてくるであろう．このことから，これらの解の性質について従来から比較研究がなされているが〔12〕，一方でそれぞれの推定法の根拠について論じる議論も多い．固有ベクトル法の代替手法としてしばしば比較検討されている幾何平均法は，統計的手法を用いた対数最小二乗法から導かれる解であることが明らかにされている〔6〕．一方，固有ベクトル法についても様々な議論がなされてきたが，最近，Sekitani and Yamakiにより「過剰評価率という尺度のばらつき最小化問題」として解釈できるという美しい数学的性質が示されている〔13〕,〔14〕．これらの議論は，いずれかの手法のみが使われるべきであるという絶対的根拠を主張している訳ではないが，それぞれの推定法がどのような内在的構造を有しているかを明らかにしているという意味で価値がある．

本稿では，幾何平均法を導く対数最小二乗法の立場から議論を進める．幾何平均法を導く対数最小二乗法では，対数線形モデルを仮定し，モデルからの逸脱度の尺度として二乗誤差の総和を考え，最小化している．これを統計的観点から論じると，誤差が等分散の対数正規分布に従う場合に期待二乗誤差の意味で最適な推定を与えることが示せる〔6〕,〔15〕．また，誤差が正規分布でない場合にも等分散の仮定が成り立てば，最小二乗法は線形推定の中で最も良い推定量となる．最小二乗法の適用においてしばしば仮定される「等分散の仮定」は多くの場合現実的であると考えられる〔15〕．しかし，一対比較値は一般に意思決定者の主観にも依存して決定されるものであるから，“代替案Aと代替案Bの一対比較値と代替案Bと代替案Cの一対比較値では，前者の方がその値の信憑性が高い”といったような状況が生じることも事実である．すなわち，一対比較を行う際，意思決定者が自信のある箇所と自信のない箇所があるとすれば，等分散の誤差が混入すると仮定するよりも，異なる分散の誤差を仮定することが適切な場合もあろう．また，従来の対数最小二乗法に基づく幾何平均法では，各一対比較値の自信の程度を表わす確信度が異なるようなケースでも，それを結果に取り入れることができなかった．そこで本研究では，意思決定者の一対比較値に対する自信の有無を，各一対比較値に混入する誤差分散を用いて表現し，対数最小二乗法の拡張である誤差に重み（確信度）を付けた重み付き最小二乗法に基づくウエイト推定法を提案す

[1]武蔵工業大学，現在，富士ゼロックス株式会社
[2]東京大学，現在，武蔵工業大学
[3]武蔵工業大学
受付：2000年3月28日，再受付（2回）
受理：2002年9月6日

る．すなわち，提案法では“一対比較行列”と“各一対比較値の誤差分散の逆数”を入力として，重み付き最小二乗法の意味で最適なウエイトの推定値を得ることができる．この方法により，意思決定者が“一対比較値の確信度”を正確に付加できれば，理論的に真の値に近いウエイトが得られる．

このような一対比較値の曖昧性を議論する立場からの研究としては，例えば，一対比較やウェイトを区間として与える方法〔16〕~〔18〕やファジィ理論を導入したファジィAHP〔19〕,〔20〕などがあり現在も多くの研究がなされている．また複数の評価者により生じる一対比較の曖昧さを議論した研究もなされている〔21〕．区間AHPやファジィAHPも魅力的な可能性を秘めているが，それぞれ異なる立場から論じられたものであり，今後もさらに議論が進むものと思われる．これに対し，幾何平均法においては対数最小二乗法という内在的構造があるので，その立場から自然に導かれるウェイト推定法を明示的に示し，その挙動を議論しておくことは本質を理解する上でも有用であると考えられる．

さらに，現実問題として各一対比較値に混入する誤差の分散を正確に知ることが難しい場合も多いと考えられる．そこで，本研究ではシミュレーション実験により，真の誤差分散と異なる重みを与えた場合の提案法の挙動について解析し，多くの場合に多少この重みが異なっていても良い推定量が得られることを示す．以上の結果，本研究で提案した方法により，従来の一対比較値だけでなく，その確信度も考慮したウエイトの推定量の算出が可能となり，AHPの適用可能性がさらに広がるものと期待できる．

2. AHPの構造

AHPにおいては，各基準に対してその基準の重要度を一対比較行列 $A=[a_{ij}]$ $(i,j=1,\ldots,n)$で表わす．この比較行列は第i番目の基準に対して第j番目の基準が何倍望ましいかを第(i,j)要素に記述したものであり，(i,j)要素と(j,i)要素は逆数の関係にある$(a_{ij}=1/a_{ji})$としている．もし，各基準に対する相互評価に矛盾がなければ，各基準に対するウエイトをu_iとすると$a_{ij}=u_i/u_j$となり，次式を満たすことになる．

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{u_1}{u_1} & \frac{u_1}{u_2} & \cdots & \frac{u_1}{u_n} \\ \frac{u_2}{u_1} & \frac{u_2}{u_2} & \cdots & \frac{u_2}{u_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{u_n}{u_1} & \frac{u_n}{u_2} & \cdots & \frac{u_n}{u_n} \end{bmatrix} \tag{1}$$

Saatyが提唱しているのは固有ベクトル法であるが，この方法は一対比較行列Aの最大固有値λ_{max}と固有ベクトル$\hat{u}$を求め，その固有ベクトルをウエイトとする方法である．

もし，一対比較行列に整合性$a_{ij}=u_i/u_j$があるならば，そのときに限り固有ベクトルは$\hat{u}=[u_i]$となり，そのときの最大固有値はnになる．

しかし矛盾なく一対比較行列の各要素が定められていることはむしろ稀であるため，一対比較行列が式(1)を満たさない場合にはこの行列Aからウエイトを推定しなければならない．一対比較行列からウエイトを推定する方法として，固有ベクトル法の他に調和平均法や一般平均法などが提案されている〔7〕~〔9〕．また統計的方法を用いた対数最小二乗法があり幾何平均法と一致することが明らかとなっている〔6〕．

3. 一対比較行列のウエイト推定法

3.1 対数最小二乗法によるウエイト推定法

統計的方法でウエイトを推定する対数最小二乗法は，次式の最小解を与える方法である．

$$\min_u \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\log a_{ij}-\log\frac{u_i}{u_j}\right)^2 \tag{2}$$

$$s.t. \quad \sum_{i=1}^{n}\log u_i=0$$

このとき推定されたウエイトは，

$$\hat{u}_i=\left(\prod_{j=1}^{n}a_{ij}\right)^{\frac{1}{n}} \qquad (i=1,\ldots,n) \tag{3}$$

となり，幾何平均の解と一致することがわかる．

3.2 従来研究と本研究への展開

式(1)が成立する状態は理想的な評価が行われた場合に実現されるだけで，通常はこのような形にはならない．つまり実際は

$$Au\approx\lambda_{max}u \tag{4}$$

というような構造になるため一対比較行列からウエイトを推定しなければならないということになる．

AHPを創案したSaatyは固有ベクトル法について照明実験を例にあげ，精神物理学を背景にその妥当性を説いている．これは，固有ベクトル法が官能検査の手法としても有効であることを示唆するものである．しかし対数最小二乗法（幾何平均法），調和平均法，一般平均法などが提案されており，どの推定方法が一番妥当なウエイト推定方法であるかといった疑問が生じる．AHPにおいて固有ベクトル法と対数最小二乗法

の関係についてはこれまでも議論の対象になっていた〔12〕．しかしなんらかの客観的尺度で，一方の優位性を証明することはされていない．調和平均法，一般平均法を含め，式 (1) の仮説が成り立っている状態，つまり整合性が完全であればどの手法を用いても真のウエイトが求められるが，整合性が成り立たない状況では推定されたウエイトは一般には異なる．その操作は，得られた整合性を持たない一対比較行列から整合性を持つ一対比較行列への写像とみなすこともできる．要するに,「何らかの尺度により最適な写像」が議論可能である．

対数最小二乗法では，式 (1) の仮説が崩れるメカニズムを誤差が混入すると捉え，各要素の持つ対数誤差が等分散の分布に従う（等分散性）と仮定している．この仮定は多くの場合現実的であると考えられる．

しかし，一対比較行列の要素は一般に意思決定者の主観にも依存されて決定されるものであるから，“代替案 A と代替案 B の一対比較値と代替案 B と代替案 C の一対比較値では，前者の方がその信憑性が高い” といったような状況が生じることも事実である．すなわち，一対比較を行う際，意思決定者が自信のある箇所と自信のない箇所があるとすれば，一対比較行列の各要素の持つ誤差分布は異なったものになるはずであり，等分散に誤差が混入すると仮定するよりも，異なる分散の誤差を仮定することが適切な場合もあろう．しかし，従来の対数最小二乗法では仮に一対比較行列において自信のある箇所と自信のない箇所があっても，その値の自信の程度を表わす確信度のような指標をモデルに取り入れることができない．そこで本研究では，一対比較行列とその値の信憑性の程度を表わす確信度を考慮に入れた AHP のウエイト算出法について議論する．つまり，より多くの情報を獲得しそれを解析に取り入れることができれば，そこから求められるウエイトはより意思決定者の意見を反映させたものになると考えられる．具体的には対数最小二乗法の拡張である重み付き最小二乗法に基づくウエイト推定法を提案する．

従来，このような一対比較値の曖昧性を議論する研究としては，区間データを用いる方法〔16〕~〔18〕やファジィ理論を導入したファジィAHP〔19],〔20〕が提案されているが，これらは本質的に本研究のモデルと立場を異にする方法である．整合性が崩れるメカニズムを確率変数である誤差で表現することが正当かどうかの議論はあるとしても，重み付き最小二乗法は従来より線形モデル等で議論されてきた方法であり，二乗誤差を評価とした線形推定という立場からは極めて自然な方法といえる．

4. 提　案　法

4.1 重み付き最小二乗法に基づくウエイト推定式の導出

本研究で提案する重み付き最小二乗法に基づくウエイト推定法では，AHP と同様の比較行列 $A=[a_{ij}]$ から出発して，これに基づいて $1,2,\ldots,n$ 各対象の真の評価値を推定する方法である．

ここで一対比較値 a_{ij} というデータは，連続な実数値をとるものとして，

$$a_{ij}=\frac{u_i}{u_j}e_{ij},\quad i,j=1,\ldots,n,\quad i<j \tag{5}$$

という構造を持つという仮定から出発する．ここで，e_{ij} は誤差を表わす確率変数で，常に正であると仮定する．式 (5) の意味するところは，i と j との一対比較値 a_{ij} は，その真の評価値 u_i と u_j との比で表わされるべきだが，そこに誤差が含まれることを表わしている．なお，$a_{ji}=1/a_{ij}$ が成り立つものとすると，$i\geq j$ の部分のデータ a_{ij} は不要である．そこで，式 (5) の両辺を（e を底とする）対数線形モデルへと変換すると，

$$\log a_{ij}=\log u_i-\log u_j+\log e_{ij} \tag{6}$$

となるが，今後式を簡単にするため，対数をドットで表わすことにすると式 (6) は，

$$\dot{a}_{ij}=\dot{u}_i-\dot{u}_j+\dot{e}_{ij},\quad i,j=1,\ldots,n,\quad i<j \tag{7}$$

となる．ここで誤差 $\dot{e}_{ij}$ の分布を

$$E(\dot{e}_{ij})=0 \tag{8}$$

$$V(\dot{e}_{ij})={\sigma_{ij}}^2 \tag{9}$$

$${\sigma_{ij}}^2=\frac{{\sigma_0}^2}{w_{ij}}\qquad ({\sigma_0}^2\text{は定数}) \tag{10}$$

とすると，

$$\min_{u}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}w_{ij}\{\dot{a}_{ij}-(\dot{u}_i-\dot{u}_j)\}^2 \tag{11}$$

の条件により推定値 $\hat{u}_1,\hat{u}_2,\ldots,\hat{u}_n$ を求めることができる．また式 (10) において，${\sigma_{ij}}^2$ は既知ではなくても，$n(n-1)/2$ 個の各一対比較値の誤差分散比が既知であるならば，式 (11) の条件の下，求められる推定値が最適解となる．ここで，w_{ij} を重みといい，${\sigma_0}^2$ は単位重量 ($w_{ij}=1$) のときの分散である．

本研究ではこの重み w_{ij} のことを “確信度” と定義し，誤差分散の大小を “意思決定者の信憑性の有無” として捉え，確信度を考慮したウエイト推定量の算出式として式 (11) のモデルを提案する．

すなわち，提案法では一対比較行列 $A=[a_{ij}]$ と確信度行列 $C=[w_{ij}]$ を入力とし，最適な推定値$\hat{u}$を得ることができる．

4.2 提案式の計算法

4.2.1 一　般　解

上述の重みつき最小二乗問題は，

$$f(\dot{\mathbf{u}})=\sum_{i<j} w_{ij}(x_{ij}-\dot{u}_i+\dot{u}_j)^2 \tag{12}$$

の最小化問題である．ただし，$\dot{\mathbf{u}}^T=(\dot{u}_1,\dot{u}_2,\cdots,\dot{u}_n)$，$\dot{x}_{ij}$は i と j の一対比較値の対数，w_{ij} は確信度である．

この問題を以下のように書き換える．一対比較値 x_{ij} を適当な順序で並べた $n(n-1)/2$ 次元ベクトルを p とする．行列 $A=(a_{ij})$ を次のように定義する．$p_k=\dot{x}_{ij}$ であるとすると，

$$a_{ik}=1$$

$$a_{jk}=-1$$

と定義する．ただし，k列のこれ以外の要素の値は 0 とする．このとき，式 (12) は，次のように書き換えられる．

$$f(\dot{\mathbf{u}})=(A\dot{\mathbf{u}}-p)^TW(A\dot{\mathbf{u}}-p) \tag{13}$$

ここで，W は w_{ij}を対角要素 kの値として持つ対角行列である．ただし，$p_k=\dot{x}_{ij}$ とする．

$Q=A^TWA+ee^T$，ただし $e^T=(1,1,\cdots,1)$ とすると，上の問題の一般解は，

$$\dot{\mathbf{u}}=Q^{-1}A^TWp+\alpha e \tag{14}$$

とあらわされる．ここで，α は任意の実数である．実際には，指数変換後の$\dot{\mathbf{u}}$の要素の和を 1 とするような値をとる．

4.2.2 $n=3$ のとき

本節では一対比較行列の大きさが $n=3$ のときを取り上げ，具体的なウエイト推定量を計算する．一般解により，$n=3$ のとき求められる重み付き最小二乗推定は，

$$\hat{\dot{u}}_1=\{w_{12}\dot{a}_{12}(w_{13}+2w_{23})+w_{13}\dot{a}_{13}(w_{12}+2w_{23})+ w_{23}\dot{a}_{23}(w_{12}-w_{13})\}/3(w_{12}w_{13}+w_{12}w_{23}+w_{13}w_{23})$$

$$\hat{\dot{u}}_2=\{-w_{12}\dot{a}_{12}(2w_{13}+w_{23})+w_{13}\dot{a}_{13}(w_{12}-w_{23})+ w_{23}\dot{a}_{23}(w_{12}+2w_{13})\}/3(w_{12}w_{13}+w_{12}w_{23}+w_{13}w_{23})$$

$$\hat{\dot{u}}_3=\{w_{12}\dot{a}_{12}(w_{13}-w_{23})-w_{13}\dot{a}_{13}(2w_{12}+w_{23})- w_{23}\dot{a}_{23}(2w_{12}+w_{13})\}/3(w_{12}w_{13}+w_{12}w_{23}+w_{13}w_{23})$$

と与えられる．w_{ij}がすべて一定の値で加わったとき推定されるウエイトは，対数最小二乗法の解，つまり幾何平均の解と一致する．また，一対比較行列が整合性の取れているときは，重みを変化させても推定されるウエイトは一定の値を取ることも確認できる．$n\geq 4$ についても解を書き下すことができるが，その解は一般に非常に複雑なものとなる．

5. 考　　　察

5.1 提案法の特徴

本研究における提案法は，重み付き最小二乗法の理論を AHP に適用したアルゴリズムである．重み付き最小二乗法の理論としては，誤差分散の比が既知であれば，その逆数の比の重みを加えることにより，最適なウエイトの推定値を得ることができる．

これを本研究では，誤差分散を“意思決定者の信憑性の有無”として捉え，また誤差の重みを“確信度”という指標でモデルに取り入れた．つまり，提案法では一対比較行列を作成する際，“一対比較行列”と確信度である“各一対比較値の誤差分散の逆数”を入力として重み付き最小二乗法の意味で最適なウエイトの推定値を得ることができる．

したがって，一対比較行列を A，確信度行列を Cとすると，$n=4$ の場合の入力は

$$A=\begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ & 1 & a_{23} & a_{24} \\ & & 1 & a_{34} \\ & & & 1 \end{bmatrix} \tag{15}$$

$$C=\begin{bmatrix} & w_{12} & w_{13} & w_{14} \\ & & w_{23} & w_{24} \\ & & & w_{34} \\ & & & \end{bmatrix} \tag{16}$$

となり，提案法によって算出された式に，それぞれ一対比較行列 A と確信度行列 Cを入力することによりウエイトの推定量を求めることができる．本研究で提案した方法は，従来の一対比較値だけでなく，その確信度をも考慮したウエイト推定量の算出が可能となることが特徴である．

もし，確信度が明らかでない場合や確信度が全ての一対比較行列で等しいと考えられる場合は，すべて 1 を入力すればよい．このとき，提案法は幾何平均法の解と一致する．また一対比較に完全に整合性がある場合には，ウエイトの値は解に影響を与えない．

5.2 従来手法との比較

一対比較値の曖昧性を取り扱った手法としては，従来から区間 AHP やファジィAHP が提案されている．区間データを用いる AHP としては，主に 2 つのバリエーションが考えられる．

1) 一対比較を値ではなく区間として与え，その区間内に一対比較値が存在することを条件に整合度を最大化するなどして，一点でウエイトを求める．
2) 与えられた一対比較値，あるいは一対比較の区間から，ウエイト自身を区間として求める．

このうちウエイトを区間として求める方法〔17〕は，統計学でいえば区間推定に対応するものであり，点推定を求めている本提案とは立場が異なる．

一方，一対比較を区間として与えウエイトを一点で求める場合，単に区間といってもその意味が重要であり，意思決定者に対する区間の意義の説明の仕方で区間幅が大きく異なることが〔18〕でも指摘されている．区間が広いということは一対比較値の確信度が低く，区間が狭いということは一対比較値の確信度が高いことを意味するが，〔18〕では集団意思決定における不満足度の評価に用いる重みとして用いている．重みを考えるという点では，本稿で提案する重み付き最小二乗法の考え方と類似しているが，その重みの計算方法は一意ではない．また，区間の一対比較からウエイトを求める際にはその区間は制約として与えられており，その区間の大小がウエイトに与える影響は間接的である．これに対し，本稿の手法は対数最小二乗法というモデルから出発する限り，最適な推定式を与えており，重みの意味付けも分散の逆数という意味では一意である．

一方，ファジィ理論を導入した AHP においても一対比較の曖昧性を取り扱うことが可能である．しかし，確率・統計とファジィはしばしば対比して議論されるように，そもそもモデルが異なっており，どちらが優れるというものではない．確率測度は一意に定義される測度であり，確率・統計学はすでにその有効性が広く認識されている．一方，ファジィ測度は一意ではないが，それゆえに自由度も大きく，これも多くの適用事例によってその有効性が示されている．AHP においてはどちらが相性が良いのかについては，今後の研究課題である．

また,「確信度が小さい」ことと「一対比較値の欠落」の問題について触れておく．確信度が小さいということはその場所の一対比較値に自信が持てないということであり,「その場所の一対比較をあきらめる」という方法が考えられる．従来，このような一対比較値が部分的に欠損した場合のウエイト推定法として，Harker 法，TS 法，一対比較値の要素を順次修正していく方法，EM アルゴリズムに基づく方法などが提案されているが，本稿で提案された方法では，一対比較値として適当な値を代入しておき，確信度を非常に小さく設定することで対処できる．また，Harker 法などで一対比較値を補間した後に，その箇所の確信度を小さく設定した提案法を適用することも可能である．

5.3 誤差分散としての確信度について

本研究で提案する重み付き最小二乗法の「重み」は，一対比較の対数に混在する誤差の分散によって一意に決定される．したがって，AHP の一対比較という状況でこの値を与えることができるかどうか，について議論が必要である．

「一対比較の整合性が崩れるメカニズムが，確率変数で表現可能な誤差によるものである」という仮定については，確率・統計の多くの適用事例と同様,「モデルで表現できていない変動を誤差と認識する」ことにより正当化されよう．すなわち,「対数線形モデルで表現して，そのモデルで説明できることをすべて説明する」という立場をとれば，誤差は確率変数とみなしても実際上差し支えない．逆にいえば，誤差の分布を考えなければ，全ての整合性を持たない一対比較行列は式 (6) で表現することができる．

対数最小二乗法では，式 (6) において，誤差 $\log e_{ij}$ がウエイトや他の誤差と独立な確率分布に従うと考えるが，この部分が問題の本質といえる．誤差 $\log e_{ij}$ がウエイトや他の誤差と従属，かつその従属関係も明らかでない場合，もはや式 (6) から出発しても有用な解は導くことができない．そのため，全く別の筋道により導かれる固有ベクトル法や一般平均法などが実際には有用となることが考えられる．しかし，実際には従属と考えられても，それを独立と考えることで解（近似式）が計算でき，実際にも応用可能であればその仮定は有用である．本研究の提案は，この誤差の独立性は保ちながらも，等分散性を排除しているという意味で従来の対数最小二乗法の拡張となっている．対数線形モデルにおいて誤差の仮定を緩めていくことで有用な方法が議論できるかどうかについては今後の課題である．

次に，独立で分散の異なる誤差を仮定した場合に，利用者がこの分散を正確に与えることができるかどうかを考えてみる．これに対する一般的な答えは否であろう．しかし，分散の平方根である標準偏差は二倍になれば分布形が横に二倍されるという意味でイメージしやすいものである．実際には誤差の分散比が分かればよいが，一対比較値の中でおおよそ確信度の高い値と

低い値を誤差分布の形でイメージし，その比率の程度を与えることは可能と思われる．この場合，利用者が与える分散はベイズ統計でいう主観確率に類似したものといえる．

しかし，仮に真の誤差分散が存在した場合に,「利用者がこれを正確に知りえないとしても，おおよその値を入力できれば何も与えないよりは良い結果が得られる」というのであれば，提案法の有用性が示されるものと思われる．その結果については，次章のシミュレーション実験において議論を行う．

6. シミュレーション実験

前節で述べたように，提案法では意思決定者が“一対比較値の確信度”を正確に付加できれば，これを適切に反映し，提案法により意思決定者の意思を反映したウエイト（理論的には真の値に近いウエイト）が得られることになる．しかし，現実問題として各一対比較値に混入する誤差分散を正確に知ることが難しい場合も多いと考えられる．

そこで，本章では，シミュレーション実験により，真の誤差分布と異なる重みを与えた場合の提案法の挙動について解析することを目的とする．

6.1 シミュレーション条件

本章で行うシミュレーション実験の条件を以下に示す．

[真値の設定]

n=3 のとき

$u_1^* = 0.571429,\ u_2^* = 0.285714,\ u_3^* = 0.142857$

n=4 のとき

$u_1^* = 0.533333,\ u_2^* = 0.266666,\ u_3^* = 0.133333,\ u_4^* = 0.066666$

[誤差分布の設定]

$$\dot{e}_{ij} = \log e_{ij} \sim N(0, {\sigma_{ij}}^2)$$

[一対比較行列の作成]

$$a_{ij} = \frac{{u_i}^*}{{u_j}^*} * \exp(\dot{e}_{ij})$$

[評価尺度の設定]

提案法によって算出されたウエイト$\hat{u}_i$と真値との二乗誤差

$$E = \sum_{i=1}^{n} (\hat{u}_i - {u_i}^*)^2 \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

試行回数：30000 回

6.2 シミュレーション方法

前節で説明した条件の下，以下の実験を行なう．

[実験 1]

誤差分散を 1 箇所変えて固定し，確信度を変化

n=3 のとき

- $\dot{e}_{12} \sim N(0,1),\ \dot{e}_{13} \sim N(0,1),\ \dot{e}_{23} \sim N(0,2)$
- $\dot{e}_{12} \sim N(0,1),\ \dot{e}_{13} \sim N(0,1),\ \dot{e}_{23} \sim N(0,4)$

それぞれ，$w_{12} = 1,\ w_{13} = 1,\ w_{23} = 1/8 \sim 1$ (1/8 間隔)

n=4 のとき

- $\dot{e}_{12} \sim N(0,1),\ \dot{e}_{13} \sim N(0,1),\ \dot{e}_{14} \sim N(0,1),$ $\dot{e}_{23} \sim N(0,2),\ \dot{e}_{24} \sim N(0,1),\ \dot{e}_{34} \sim N(0,1)$
- $\dot{e}_{12} \sim N(0,1),\ \dot{e}_{13} \sim N(0,1),\ \dot{e}_{14} \sim N(0,1),$ $\dot{e}_{23} \sim N(0,4),\ \dot{e}_{24} \sim N(0,1),\ \dot{e}_{34} \sim N(0,1)$

それぞれ，$w_{12} = 1,\ w_{13} = 1,\ w_{14} = 1,\ w_{24} = 1,\ w_{34} = 1,\ w_{23} = 1/8 \sim 1$ (1/8 間隔)

[実験 2]

誤差分散を 2 箇所変えて固定し，確信度を変化

n=3 のとき

$\dot{e}_{12} \sim N(0,2),\ \dot{e}_{13} \sim N(0,1),\ \dot{e}_{23} \sim N(0,4)$

$w_{13} = 1,\ w_{12}, w_{23} = 1/8 \sim 1$ (1/8 間隔)

n=4 のとき

$\dot{e}_{12} \sim N(0,2),\ \dot{e}_{13} \sim N(0,1),\ \dot{e}_{14} \sim N(0,1),\ \dot{e}_{23} \sim N(0,4),\ \dot{e}_{24} \sim N(0,1),\ \dot{e}_{34} \sim N(0,1),$

$w_{13} = 1,\ w_{14} = 1,\ w_{24} = 1,\ w_{34} = 1,\ w_{12}, w_{23} = 1/8 \sim 1$ (1/8 間隔)

[実験 3]

誤差分散，確信度をそれぞれ変化

n=3 のとき

$\dot{e}_{12} \sim N(0,1),\ \dot{e}_{13} \sim N(0,1),\ \dot{e}_{23} \sim N(0, {\sigma_{23}}^2)$

${\sigma_{23}}^2 = (1/8, 1/4, 1/2, 1, 2, 4, 8)$

$w_{12} = 1,\ w_{13} = 1,\ w_{23} = (1/8, 1/4, 1/2, 1, 2, 4, 8)$

n=4 のとき

$\dot{e}_{12} \sim N(0,1),\ \dot{e}_{13} \sim N(0,1),\ \dot{e}_{14} \sim N(0,1),\ \dot{e}_{23} \sim N(0, \sigma_{23}^2),\ \dot{e}_{24} \sim N(0,1),\ \dot{e}_{34} \sim N(0,1)$

$\sigma_{23}^2 = (1/8, 1/4, 1/2, 1, 2, 4, 8)$

$w_{12} = 1,\ w_{13} = 1,\ w_{14} = 1,\ w_{24} = 1,\ w_{34} = 1,\ w_{23} = (1/8, 1/4, 1/2, 1, 2, 4, 8)$

6.3 実験結果

ここでは，実験 1 から実験 3 において $n=3$，$n=4$ のときの結果を示す．

表1　実験1（$n=3$）の結果

	w23=1/8	w23=1/4	w23=3/8	w23=1/2	w23=5/8	w23=3/4	w23=7/8	w23=1
N(0,2)	0.07229	0.06623	0.06421	0.06368	0.0644	0.06462	0.06563	0.06641
N(0,4)	0.07463	0.07171	0.07284	0.07589	0.07871	0.08161	0.08497	0.08706

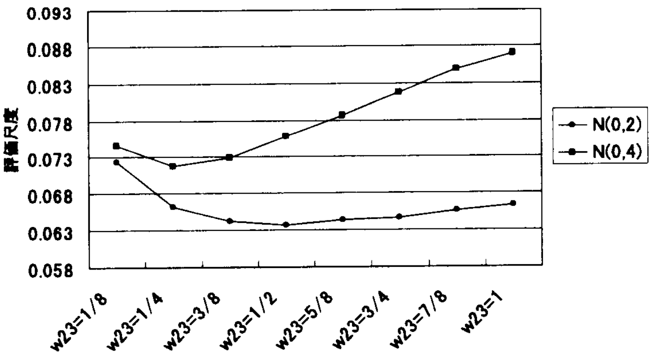

図1　実験1（$n=3$）の結果

表2　実験1（$n=4$）の結果

	w23=1/8	w23=1/4	w23=3/8	w23=1/2	w23=5/8	w23=3/4	w23=7/8	w23=1
N(0,2)	0.04693	0.04506	0.04413	0.04385	0.04404	0.04437	0.04487	0.04565
N(0,4)	0.04763	0.04675	0.04717	0.04849	0.05034	0.05226	0.05424	0.05648

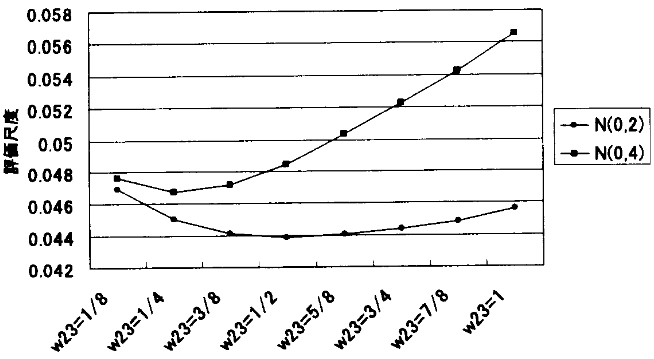

図2　実験1（$n=4$）の結果

6.4　考　　察

実験結果をまとめると以下のようになる．

- 実験1から実験3の結果より，提案法では各一対比較値に混入する誤差分散の逆数の重みが加われば，評価尺度である真値と提案法で推定されたウエイトとの二乗誤差が最小，つまり最適解となる．
- 実験1から実験3において，すべての一対比較値の誤差分散の重みが一定の値で加わったとき推定されるウエイトは，対数最小二乗法の解，つまり幾何平均となる．提案法において重み（確信度）を考慮して求められたウエイトでは，最適な重みと多少異なっていても，幾何平均と比べ良い推定量が得られている．

以上のことから，与えられた一対比較値に対し確信度の差が明らかに存在すると認識される場合，そのまま幾何平均法を用いることは明らかにその情報を無視しており，多少その確信度が正確性を欠いたとしても，

表3　実験2（$n=3$）の結果

	w23=1/8	w23=1/4	w23=3/8	w23=1/2	w23=5/8	w23=3/4	w23=7/8	w23=1
w12=1/8	0.10786	0.12605	0.13766	0.14606	0.15024	0.15428	0.15668	0.15881
w12=1/4	0.09886	0.10512	0.11345	0.12114	0.12618	0.13022	0.13356	0.13639
w12=3/8	0.10016	0.09976	0.10361	0.1088	0.11369	0.11724	0.12101	0.12343
w12=1/2	0.10225	0.09841	0.10064	0.10372	0.1066	0.1101	0.11337	0.11548
w12=5/8	0.10524	0.09892	0.09921	0.10119	0.10409	0.10614	0.10894	0.11093
w12=3/4	0.10664	0.09999	0.0987	0.10021	0.10235	0.10431	0.10604	0.10869
w12=7/8	0.10821	0.10145	0.09936	0.10011	0.10136	0.10407	0.10598	0.10747
w12=1	0.10936	0.10191	0.10031	0.10083	0.10148	0.1031	0.10506	0.10687

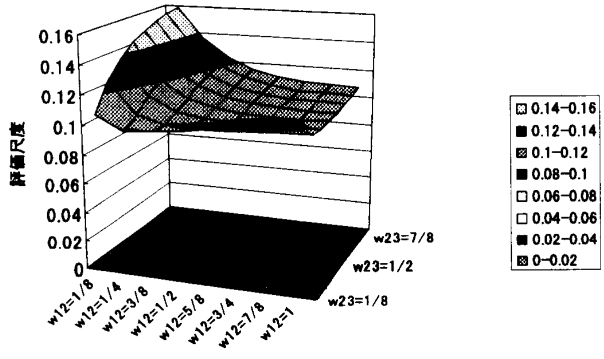

図3　実験2（$n=3$）の結果

表4　実験2（$n=4$）の結果

	w23=1/8	w23=1/4	w23=3/8	w23=1/2	w23=5/8	w23=3/4	w23=7/8	w23=1
w12=1/8	0.068558	0.067418	0.068871	0.072495	0.075752	0.079224	0.082152	0.085128
w12=1/4	0.06201	0.061024	0.062709	0.065483	0.068314	0.071462	0.074213	0.077215
w12=3/8	0.059308	0.058422	0.059441	0.061653	0.06452	0.06709	0.069643	0.072289
w12=1/2	0.058875	0.057513	0.05842	0.060038	0.062044	0.064645	0.06739	0.070028
w12=5/8	0.059542	0.058183	0.058297	0.060017	0.061853	0.064031	0.065778	0.068148
w12=3/4	0.06091	0.059066	0.059402	0.060417	0.061956	0.064013	0.065644	0.06743
w12=7/8	0.062428	0.060257	0.060576	0.061335	0.062538	0.064123	0.065833	0.067568
w12=1	0.064278	0.061965	0.061441	0.062163	0.06317	0.064798	0.066367	0.068029

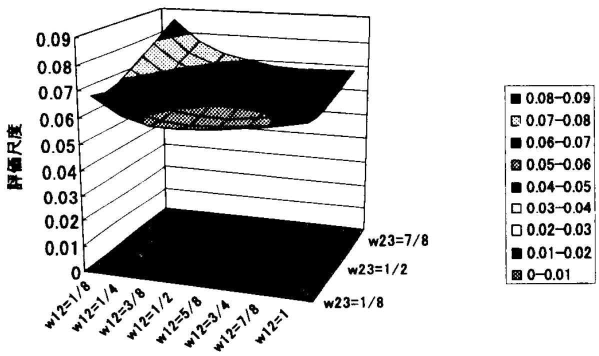

図4　実験2（$n=4$）の結果

一対比較値の確信度の情報を付加する提案法を用いることにより精度の高い推定が行えることがわかる．すなわち，実際には誤差分散が分からなくとも，おおよその値さえ入れられればただの幾何平均よりは推定精度が向上するといえる．

確信度に誤差分散という確率的な観点から意味付けする本稿の方法は，仮定さえ認められれば理論的には整合性を持つ．しかし，AHP のウェイト推定において果たして幾何平均の前提である対数線形モデルが良いのかどうか，という課題は今だ多くの議論がなされ

表5　実験3（$n=3$）の結果

	v23=1/8	v23=1/4	v23=1/2	v23=1	v23=2	v23=4	v23=8
w23=1/8	0.07094	0.0707	0.07102	0.07148	0.07244	0.07424	0.078
w23=1/4	0.06134	0.0618	0.0624	0.06393	0.06654	0.07204	0.08226
w23=1/2	0.05218	0.05285	0.05444	0.05766	0.06381	0.07573	0.0987
w23=1	0.04554	0.0471	0.04987	0.05544	0.06648	0.08732	0.12578
w23=2	0.04248	0.04483	0.04884	0.057	0.07239	0.10177	0.15269
w23=4	0.04155	0.04416	0.04935	0.05946	0.07847	0.11282	0.17303
w23=8	0.0415	0.04451	0.0499	0.06111	0.08226	0.12063	0.18557

$(v_{23}=\sigma^2_{23})$

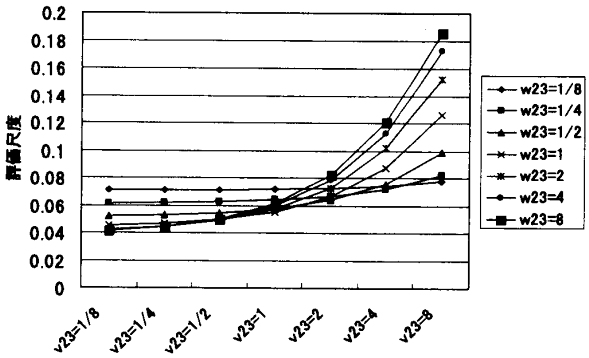

図5　実験3（$n=3$）の結果

表6　実験3（$n=4$）の結果

	v23=1/8	v23=1/4	v23=1/2	v23=1	v23=2	v23=4	v23=8
w23=1/8	0.04667	0.04679	0.04653	0.04671	0.04709	0.04771	0.0487
w23=1/4	0.04348	0.04346	0.04369	0.0442	0.04498	0.04671	0.05026
w23=1/2	0.03937	0.03962	0.04017	0.04142	0.04387	0.04846	0.05823
w23=1	0.03548	0.03612	0.03743	0.04008	0.04565	0.0563	0.07755
w23=2	0.03292	0.03409	0.03657	0.0414	0.05101	0.06975	0.10533
w23=4	0.03198	0.03365	0.03723	0.04419	0.05782	0.08462	0.13312
w23=8	0.03167	0.03394	0.03811	0.04687	0.06383	0.09587	0.15292

$(v_{23}=\sigma^2_{23})$

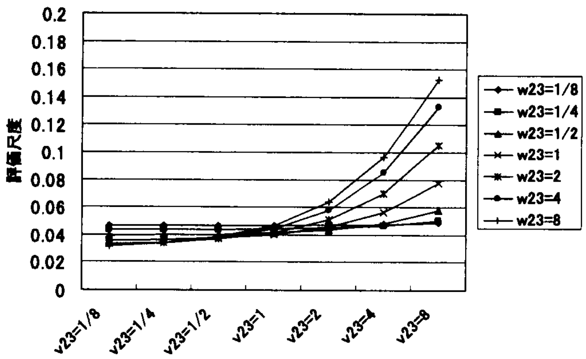

図6　実験3（$n=4$）の結果

ており，この点は本稿の方法においても課題といえる．実際の具体的問題への適用例を増やすことによって吟味していくことが必要であろう．

7. 結　　　論

本研究では，AHPにおける一対比較行列のウエイト推定方法として，誤差に重み（確信度）を付けた重み付き最小二乗法に基づくウエイト推定方法を提案した．提案法では，各一対比較行列の要素の分散がそれぞれ異なるものとして捉え，重み付き最小二乗法の意味で最適なウエイトの推定値を得ることができることを示した．また，シミュレーション実験により真の誤差分布と異なる重みを与えた場合の提案法の挙動について解析し，多くの場合に多少この重みが異なっていても良い推定量が得られたことを示した．以上の結果，本研究で提案した方法により，従来の一対比較値だけでなく，その確信度をも考慮したウエイトの推定量の算出が可能となり，AHPの適用可能性がさらに広がるものと期待できる．

謝　　　辞

本研究を進めるにあたり，査読者の方から研究の本質に関わる重要なご指摘を戴きました．敬意を表すると共に深く感謝させて戴きます．

参 考 文 献

〔1〕 Saaty, T.L.: The Analytic Hierarchy Process, Mc Graw Hill (1980)

〔2〕 刀根　薫：「ゲーム感覚意思決定法」，日科技連出版社 (1990)

〔3〕 刀根　薫，真鍋龍太郎（編）：「階層化意思決定法 AHP 事例集」，日科技連出版社 (1990)

〔4〕 木下栄蔵：「わかりやすい意思決定入門，基礎からファジィ理論まで」，近代科学社 (1998)

〔5〕 加藤　豊，小澤正典：「ORの基礎，AHPから最適化まで」，実教出版 (1998)

〔6〕 高橋磐郎："AHPからANPへの諸問題1～6"，オペレーションズ・リサーチ，1～6月号 (1998)

〔7〕 加藤　豊，小澤正典："調和平均法による AHP"，JSQC 第 58 回研究発表会研究発表要旨，pp. 59–62 (1998)

〔8〕 加藤　豊，小澤正典："一般平均法による AHP"，日本経営工学会平成 10 年度秋季研究大会予稿集，pp. 64–65 (1998)

〔9〕 加藤　豊，小澤正典："AHP における一般平均法の整合度関数"，日本経営工学会平成 11 年度秋季研究大会予稿集，pp. 108–109 (1999)

〔10〕 Lane, E.F. and Verdini, W.A.: "A Consistency Test for AHP Decision Makers", *Decision Sci.*, Vol. 20, pp. 575–590 (1989)

〔11〕 Lootsma, F.A.: "Conflict Resolution via Oairwise Comparison of Concessions", *Eur. J. Oper. Res.*, Vol. 40, pp. 109–116 (1989)

〔12〕 仁科　健，柴山忠雄："一対比較行列における固有ベクトル法と対数最小二乗法の比較"，品質，Vol. 22, No. 2, pp. 115–123 (1992)

〔13〕 Sekitani, K. and Yamaki, N.: "A Logical Interpretation for Eigenvalue Method in AHP", *J.*

Oper. Res. Soc. Jpn., Vol. 42, pp. 219–232 (1999)
〔14〕 関谷和之："AHP と固有値問題"，木下栄蔵 編著,「AHP の理論と実際」, pp. 161–182, 日科技連 (2000)
〔15〕 田島　稔，小牧和雄：「最小二乗法の理論とその応用」，東洋書店 (1986)
〔16〕 Arbel, A. and Vargas, L.G.: The Analytic Hierarchy Process with Interval Judgements, Multiple Criteria Decision Making, Springer-Verlag, pp. 61–70 (1992)
〔17〕 杉原一臣，前田　豊，田中英夫："区間データの可能性 AHP モデル"，京都大学数理解析研究所 不確実・不確定性のもとでの数理的決定理論研究集会報告集, No. 1132-5 (2000)
〔18〕 山田善靖："区間 AHP による集団合意形成"，木下栄蔵 編著,「AHP の理論と実際」, pp. 77–90, 日科技連 (2000)
〔19〕 川井宏哉，稲積宏誠，伊藤益敏："ファジィAHP における整合度 (C.I.) に関する研究"，1992 年度日本 OR 学会春季研究発表会アブストラクト集，pp. 68–69 (1992)
〔20〕 高野伸栄："非加法的ウェイトを用いた AHP"，木下栄蔵 編著,「AHP の理論と実際」, pp. 117–130, 日科技連 (2000)
〔21〕 八巻直一，関谷和之："複数の評価者を想定した大規模 AHP の提案と人事評価への適用"，*J. Oper. Res. Soc. Jpn.*, Vol. 42, No. 4, pp. 405–421 (1997)