研究論文　3-4

階層型意思決定モデル（AHP）と統計学的考察

後藤正幸[1]

1　はじめに

複数の代替案の中から、どの案をとるべきかを意思決定しなければならない状況は数多く存在する。その際、様々な評価尺度に基づいて各代替案を吟味し、総合的に最も好ましい代替案を選択すべきであろう。人間は意思決定の際には多くの評価基準のもとで総合的な判断を行う。しかし、そのままではそれは客観的な判断のプロセスとはなっていない。その案が良い理由を第三者と議論する際など、客観的な意思決定のモデルをもとに議論することにより、議論も深まり、よりリスクの少ない意思決定が行えるものと考えられる。このように最終的な意思決定に至る過程をモデル化し、人間の曖昧な判断もモデルの中に表現したもとで、意思決定の良し悪しを議論することは重要である。

T.L.Saaty は、人間の勘やフィーリングなどの曖昧な尺度を含め、各代替案を合理的に評価する方法として、AHP（Analytic Hierarchy Process）を提唱した[1]。AHP は評価基準や代替案に対し、一対比較により評価を行なうという特徴を持っており、簡便な手法でもあるため様々な分野で多くの事例が報告されている[2]－[4]。AHP のモデルは OR の分野等で脚光を浴び、様々な方向へ研究と適用が広がっている[5]。AHP は主に２つのフェーズから成り立っている。まず第一に、代替案と評価尺度の関係を階層モデルで構造化するフェーズである。その際には、評価尺度を網羅的に挙げたあとで、それらをグルーピングして構造化するなどの過程が必要である。第二に、構造化された代替案と評価基準の関係のもとで、代替案や評価基準の重要度（ウェイト）の推定を行うフェーズがある。この第二のウェイト推定のフェーズにおいては、T.L. Saaty は固有ベクトル法という方法を提唱した[1]。その後、簡便な推定法や他の視点から導かれた推定法など、様々なウェイト推定法が提案されている[5]－[7]。また、このウェイト推定は、人間の直感的なフィーリング等を数値化するものであり、その妥当性の検証のため様々な切り口からモデルの有効性を測る必要があり、その評価法についても様々な議論が行われている[8]－[15]。

本稿では、AHP の基礎的理論を概観したもとで、AHP のウェイト推定法について統計的考察による議論を行う。社会調査や品質管理などのデータ解析でしばしば用いられる多変量解析では、データから推定されたパラメータやモデルの妥当性を検討する指標が備わっている[16]。例えば、重回帰分析では、寄与率や F 値、t 値、テコ比、ダービンワトソン比、データの信頼区間など、様々な評価指標に基づいて検証する枠組みが構築されている。AHP のモデルにおいても、このように様々な視点からモデル検証と行うことが可能であることを指摘し、その有効性について述べる。

2　AHP のモデル

2.1　代替案と評価基準

代替案の集合を $\{S_1, S_2, \cdots, S_n\}$ としよう。例えば、夏休みの旅行先を決めるという簡単な問題を考え、$S_1=\{$沖縄$\}$, $S_2=\{$ハワイ$\}$, $S_3=\{$サイパン$\}$ の３つの候補があるような状況を考えればよい ($n=3$)。AHP では各代替案の評価値 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ が計算できるものとする。この評価値は代替案のウエイトと呼ばれ、大きい程その代替案が望ましいものとする。すなわち、$u_1, u_2, \cdots, u_n$ が与えられれば、この値の一番大きい代替案が最も望ましく、各

1　武蔵工業大学環境情報学部助教授

代替案の良さが定量的に把握できる。

しかし、そのウエイトが最初から与えられるならば、その問題は簡単である。通常は、各代替案に対して多くの評価基準が存在し、それらが代替案の良さに影響を与えるために、初めから代替案の評価値（ウエイト）を決定することが難しい。例えば、旅行先の例において、$C_1=${旅行費用}という評価基準ではサイパンが優れ、$C_2=${ショッピング}という評価基準ではハワイが優れるといった状況もある。さらに、$C_1=${旅行費用}と$C_2=${ショッピング}のどちらを重要視して代替案を評価するかによって、各代替案のウエイトも異なってくるであろう。評価基準には重要視したいものとそうでないものが混在することが多い。

そこで、c 個の評価基準の重要性を表すウエイトをそれぞれ $w_1, w_2, \cdots w_c$，評価基準 C_k で評価したときの各代替案の良さを表すウエイトを $v_{k1}, v_{k2}, \cdots v_{kn}$ としよう。ただし、$\sum_{j=1}^{c} w_j=1$, $\sum_{j=1}^{n} v_{kj}=1$ とする。このとき、総合的に代替案 C_j の良さを表すウエイト u_j を

$$u_j = w_1 v_{1j} + w_2 v_{2j} + \cdots + w_c v_{cj}, \qquad (1)$$

と与えるモデルを考える $(j=1, 2, \cdots, n)$。すなわち各評価基準で評価したときの評価値（ウエイト）を、評価基準の重要性を表すウエイトで重み付け平均したものを考えるのである。w_k, v_{kj} $(k=1, 2, \cdots, c, j=1, 2, \cdots, n)$ が評価できれば、各代替案の良さを表す指標 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ が計算できるという訳である。これが AHP の基本的なモデルであり、各評価基準のもとでの良し悪しを評価し、さらに各評価基準の重要度で重み付け平均するという極めてシンプルな構造のモデルといえる。

ここでは、代替案に対して、同じレベルの評価基準が与えられるモデルを考えたが、評価基準には階層構造があってもよい。例えば、企業の評価においては“収益性”という評価基準の下に、“利益”と“利益率”といった分類も可能であろう。利益率には、”売上高営業利益率”のように○○率といった様々な評価指標が含まれる。このように、評価基準には階層構造が見られるのが普通であり、これは前述の評価値算出モデルを複数段に接続することにより表現することができる。

2.2 ウェイト推定

前節の議論から、$u_1, u_2, \cdots, u_n$ を求めるためには、w_k, v_{kj} $(k=1, 2, \cdots, c, j=1, 2, \cdots, n)$ が評価できればよいことがわかる。しかしながら、これらのウェイトを数量的に与えることも実際には難しいことが多い。そこで、ここでは人間の評価の曖昧性や揺らぎを出来るだけ排除して、合理的にウェイトを推定する方法について述べる。

以下では記法を簡単にするために、代替案の集合を $S=\{S_1, S_2, \cdots, S_n\}$、代替案 S_i の評価値を表すウェイトを w_i $(w_i>0, i=1, 2, \cdots, n)$ として、各ウェイト w_i を求める問題を考えよう。AHP では、代替案 S_j が代替案 S_j よりも何倍好ましいかを表す一対比較値 a_{ij} が得られるものとする。これは、評価基準全体を見渡して各代替案のウエイトを決めるのは難しいが、１対１の比較であれば人間でも容易に判断できるという現実を表現したモデルになっている。その結果、AHP のウェイト推定は、全ての一対比較値を１つの行列 $A=\{a_{ij}\}_{i, j=1, 2, \cdots, n}$（一対比較行列と呼ぶ）にまとめ、この行列から各代替案の評価値 $w_1, w_2, \cdots, w_n$ を求める問題に帰着する。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 1/a_{12} & 1 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/a_{1n} & 1/a_{2n} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

一対比較行列について、$n=3$ の場合の例を以下に示すと、

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 1 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 1 \end{pmatrix} \qquad (3)$$

のようになる。ただし、$a_{21}=1/a_{12}, a_{31}=1/a_{13}, a_{32}=1/a_{23}$ である。

Saaty は、一対比較値 a_{ij} が $a_{ij}=w_i/w_j$ と与えられていれば、$\boldsymbol{w}=(w_1, w_2, \cdots, w_n)^T$ として

$$n\boldsymbol{w}=A\boldsymbol{w} \tag{4}$$

という構造が成り立つことに着目し、A の固有ベクトルを計算することにより、$\boldsymbol{w}$ を与える固有ベクトル法を提案した。A の固有値を求めると

$$\lambda\hat{\boldsymbol{w}}=A\hat{\boldsymbol{w}} \tag{5}$$

の形で A の固有値 λ と固有ベクトル $\hat{\boldsymbol{w}}$ が得られる。仮に、厳密に式(4)が成り立てば、$\lambda=n, \hat{\boldsymbol{w}}=\boldsymbol{w}$ となることが分かるであろう。しかし、現実問題において式(4)の構造が厳密に成り立つことはむしろ希である。したがって、固有ベクトル法で求められるウェイトは一種の推定量となる。

一方で、与えられた一対比較値に誤差が混入するものとし、$\log a_{ij}=\log w_i-\log w_j+\log e_{ij}$ という対数線形構造を仮定して対数最小二乗法（LLS）によりウエイトを推定する方法が提案されている。他にも様々な観点からウエイト算出法が提案されているが、これらは全て一対比較行列 A が完全に与えられたときに、式(4)の基本構造からウェイトを推定する方法といえる。

評価基準が複数ある場合には、それぞれの評価基準のもとでの一対比較行列から同様の計算により、各評価基準のもとでの代替案のウエイトを求めることができる。同様に評価基準のウエイトも、評価基準間の一対比較行列から算出することができる。

3 AHP のウエイト推定法

3.1 固有ベクトル法

再び、$n=3$ の場合の AHP の構造を以下に示そう。

$$A=\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 1 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \frac{w_1}{w_3} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \frac{w_2}{w_3} \\ \frac{w_3}{w_1} & \frac{w_3}{w_2} & \frac{w_3}{w_3} \end{pmatrix} \tag{6}$$

AHP では式(6)のように、得られた一対比較値 a_{ij} は w_i と w_j との比であると考える。問題は、得られた一対比較行列 A から、ウエイトベクトルを逆算することになる。式(6)の仮定が成り立っていると仮定すれば、一対比較行列の固有値問題になり、Saaty は A の固有ベクトルを求めることでウエイトベクトルを求める方法（固有ベクトル法）を提案した。

しかし、一般に式(6)は必ずしも成り立つ訳ではない。すなわち、A の固有値 λ が $\lambda=n$ とならないことがある。むしろ実際問題では完全に当てはまることはほとんどない。しかしながら、式(6)という構造を仮定して議論を始めていることから、固有値を用いた方法は直感的にも認められる方法であると言えよう。固有ベクトル法によるウェイト推定の理論的根拠については、最近になって K. Sekitani and N. Yamaki によって示されている[22]、[23]。

3.2 対数最小二乗法によるウエイト推定

前節でも述べたが、実際に AHP を適用すると整合性が悪くなる場合がある。そこで、整合性が悪くなる原因は一対比較値に誤差が混入していると仮定し、この誤差を最小にしようとする方法が対数最小二乗法（LLS）である。LLS では、一対比較値 a_{ij} を連続的な値をとるものとして、式(7)のように仮定する。

$$a_{ij}=\frac{w_i}{w_j}e_{ij} \quad (i, j=1, 2, \ldots, n) \tag{7}$$

ここで e_{ij} は誤差を表す確率変数であり、常に正であるとする。式(7)の両辺の対数をとると、

$$\dot{a}_{ij}=\dot{w}_i-\dot{w}_j+\dot{e}_{ij} \tag{8}$$

となる。ただし $\log a_{ij} = \dot{a}_{ij}$ であり、$\dot{e}_{ij}$ は、

$$E(\dot{e}_{ij}) = 0, \quad V(\dot{e}_{ij}) = \sigma^2 \tag{9}$$

である独立な確率変数であると仮定する。すわなち、対数をとったときに線形構造があることを仮定しており、これが対数線形モデルといわれる所以である。このとき、最小二乗推定 $\hat{\dot{w}}_i$ が $\dot{w}_i\ (i = 1, 2, \cdots, n)$ に対する最良の推定を与えることが、ガウス・マルコフの定理より証明されている。さらに、その解はラグランジュ乗数法を用いて導くことができ、一対比較行列の幾何平均の解

$$\hat{w}_i = \frac{\sqrt[n]{a_{i1}a_{i2}a_{i3}\cdots a_{in}}}{\sum_{i=1}^{n} \sqrt[n]{a_{i1}a_{i2}a_{i3}\cdots a_{in}}} \tag{10}$$

と一致することが知られている。すなわち、適用問題によってその都度、対数最小二乗問題を解かなくても、幾何平均法によってウェイト推定をすればよいことが分かる。

3.3　モデルの整合性

AHP では、式(6)の構造（モデル）から解析を出発する。すなわち、多くの現実問題において式(6)はおおよそ成り立っているだろうとの考えに基づいているのである。しかし、現実問題において式(6)が厳密に成り立っていることはむしろ稀である。そこで、式(6)の構造（モデル）と現実の一対比較行列のずれを表す規準を計算し、この値が許容できるものであれば、AHP の解析結果はほぼ妥当であると判断するのが適当であろう。

そこで、このモデルの整合性を判断する基準（**整合度**）について考えてみよう。もし、式(6)が完全に成り立っているならば、

$$A\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} nw_1 \\ nw_2 \\ \vdots \\ nw_n \end{pmatrix} = n\boldsymbol{w} \tag{11}$$

であるから、

$$(1/w_1 \quad 1/w_2 \quad \cdots \quad 1/w_n)A\boldsymbol{w} = n + n + \cdots + n = n^2 \tag{12}$$

となることがわかる。したがって、

$$h = (1/w_1 \quad 1/w_2 \quad \cdots \quad 1/w_n)A\boldsymbol{w} \tag{13}$$

と定義すると、$h/n = n$ となるはずである。もし、式(6)が成り立っていないとするならば、$h/n \neq n$ となってしまう。実は $h/n - n$ の値は式(6)が成り立っていれば 0、そうでないときには正の値をとることが知られている。そこで、この値を整合性を判断する基準と考えてよいであろう。実際には、n の大きさによって数値の大きさが変わることを避けて、基準化した規準

$$CI = \frac{h/n - n}{n - 1} \tag{14}$$

を整合度とする。一般には、この整合度の値が 0.1 以下であれば、許容できるずれであるといわれている。AHP を用いて各代替案のウエイトを求めたら、この整合度を計算し、得られたウエイトが意味のあるものであるかどうかを判断しなければならない。もし CI の値が大きい場合には、式(6)が成り立っていないことを意味するので、式(6)の仮定から得られたウエイトは意味をもたないからである。

4　分析の手順と具体例

4.1　AHP の手順

ここでは、幾何平均法を用いる AHP の評価値（ウエイト）算出の手順をまとめてみよう。

Step 1：代替案の構成

まずは、対象とする問題を明確にし、選択の対象である代替案を決定する。例えば、旅行先を決定する問題ならば、その候補地をあげる。

Step 2：評価基準の選定

代替案の良し悪しを判断するための評価基準を決定する。例えば、旅行先決定の問題ならば、値段、交通手段、ホテルのグレード、食事の有無、遊楽施

設の充実性など、その問題を考えるのに必要最小限の評価基準を設定する。

Step 3 ：一対比較行列作成

評価基準の一対比較： 全ての評価基準の対に対し、どちらを重要視するかを決める一対比較値を与え、一対比較行列を作成する。一対比較値は正数であれば、連続値をとっても構わない。

評価基準のもとでの代替案の一対比較： 各評価基準のもとでの、代替案どうしの一対比較値を与え、一対比較行列を作成する。一対比較値は正数であれば、連続値をとっても構わない。

Step 4 ：一対比較行列からウエイト推定

幾何平均法を用いて、

評価基準のウエイト：評価基準どうしの一対比較から与えられた一対比較行列に基づいて、式(10)により各評価基準のウエイト $w_k\ (k=1, 2, \cdots, c)$ を計算する。

評価基準のもとでの代替案のウエイト：評価基準 C_k のもとでの各代替案の一対比較から得られた一対比較行列に基づいて、式(10)により各代替案のウエイト $v_{kj}\ (j=1, 2, \cdots, n)$ を計算する。これを全ての評価基準に対し $k=1$ から $k=c$ まで繰り返す。

以上により、$w_k, v_{kj}\ (k=1, 2, \cdots, c, j=1, 2, \cdots, n)$ の値が出揃う。

Step 5 ：代替案の総合ウエイト（評価値）を算出

Step 4 で得られた各ウエイトから

$$u_j = w_1 v_{1j} + w_2 v_{2j} + \cdots + w_c v_{cj},\ (j=1, 2, \cdots, n) \tag{15}$$

に基づいて、各代替案の総合ウエイトを算出する。

Step 6 ：整合度を算出し、モデルの適合性を判断

評価基準のウェイトについて、整合性を表す指標（整合度）CI を次式により求める。

$$CI = \frac{h/n-n}{n-1} \tag{16}$$

ただし、h は

$$h = (1/w_1 \quad 1/w_2 \quad \cdots \quad 1/w_n)\, A\boldsymbol{w} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \tag{17}$$

で与えられる。

同様に、各評価基準のもとでの代替案のウェイトについてもそれぞれ CI を求める。これらの値が全て 0.1 以下であれば、モデルの整合性は許容範囲であると判断する。もし、整合性がないと判断される場合には、該当する一対比較行列を見直す。

4.2　具体例－旅行先選定の例

再び、簡単な例として、旅行先を決める問題に対し適用方法を追っていこう。実際には、評価基準の選定や階層構造の決定には、より網羅的な吟味が必要であることを付記しておく。

Step 1 ：代替案の構成

ここで選択の候補としてあげるのは、$S_1=\{$沖縄$\}$ $S_2=\{$ハワイ$\}$、$S_3=\{$サイパン$\}$ とする。

Step 2 ：評価基準の選定

評価基準には、$C_1=\{$旅行費用$\}$、$C_2=\{$海のきれいさ$\}$、$C_3=\{$ショッピング関係施設の充実性$\}$ とする。

Step 3 ：一対比較行列作成

評価基準の一対比較：評価規準間に対する一対比較を $w_1/w_2=2, w_1/w_3=6, w_2/w_3=2$ と与える。これは意思決定者の判断で与えるものである。このとき、一対比較行列 A_w は

$$A_w = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1/2 & 1 & 2 \\ 1/6 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \tag{18}$$

となる。

評価基準のもとでの代替案の一対比較：評価基準 $C_1=\{$ 旅行費用 $\}$ のもとで、各代替案の一対比較を行い、$v_{11}/v_{12}=1.0, v_{11}/v_{13}=0.3, v_{12}/v_{13}=0.5$ とする（費用は高いほど悪いので注意）。このとき得られる一対比較行列 A_{C_1} は

$$A_{C_1}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0.3\\ 1 & 1 & 0.5\\ 1/0.3 & 1/0.5 & 1\end{pmatrix} \tag{19}$$

となる。

評価基準$C_2=\{$海のきれいさ$\}$のもとで、各代替案の一対比較を行い、$v_{21}/v_{22}=0.8$, $v_{21}/v_{23}=8$, $v_{22}/v_{23}=4$とする。このとき得られる一対比較行列 A_{C_2} は

$$A_{C_2}=\begin{pmatrix}1 & 0.8 & 8\\ 1/0.8 & 1 & 4\\ 1/8 & 1/4 & 1\end{pmatrix} \tag{20}$$

となる。

評価基準 $C_3=\{$ショッピング関係施設の充実性$\}$ のもとで、各代替案の一対比較を行い、$v_{31}/v_{32}=0.2$, $v_{31}/v_{33}=0.4$, $v_{32}/v_{33}=5$ とする。このとき得られる一対比較行列 A_{C_3} は

$$A_{C_3}=\begin{pmatrix}1 & 0.2 & 0.4\\ 1/0.2 & 1 & 5\\ 1/0.4 & 1/5 & 1\end{pmatrix} \tag{21}$$

となる。

Step 4：一対比較行列からウエイト推定

幾何平均法⑽式を用いて、それぞれの一対比較行列から各ウエイトを算出する。

評価基準のウエイト：$w_1=0.614$, $w_2=0.268$, $w_3=0.117$

評価基準のもとでの代替案のウエイト：評価基準C_1のもとでのウエイト：$v_{11}=0.200 v_{12}=0.237 v_{13}=0.562$

評価基準 C_2 のもとでのウエイト：$v_{21}=0.478$, $v_{22}=0.441$, $v_{23}=0.881$

評価基準 C_3 のもとでのウエイト：$v_{31}=0.104$, $v_{32}=0.705$, $v_{33}=0.191$

Step 5：代替案の総合ウエイト（評価値）を算出

Step 4で得られた各ウエイトから

$$u_j=w_1u_{1j}+w_2u_{2j}+w_3u_{3j},\ (j=1,2,3) \tag{22}$$

に基づいて、各代替案の総合ウエイトは

$$u_1=0.263,\ u_2=0.347,\ u_3=0.390 \tag{23}$$

と計算できる。

Step 6：整合度を算出し、モデルの適合性を判断

各一対比較行列の整合性を表す指標（整合度）CIを

$$CI=\frac{h/n-n}{n-1} \tag{24}$$

により順次求めていくと、

1. 評価基準 C_1 のもとでの一対比較行列の整合度：$CI_{C_1}=0.0145$.
2. 評価基準 C_2 のもとでの一対比較行列の整合度：$CI_{C_2}=0.0470$.
3. 評価基準 C_3 のもとでの一対比較行列の整合度：$CI_{C_3}=0.0470$.
4. 評価基準間の一対比較行列の整合度：$CI_{all}=0.0009$.

となる。この値はどれも 0.1 以下でるので、モデルの整合性は許容範囲であると判断できる。

5　統計的手法を導入した AHP のウェイト推定に関する話題

ここでは、幾何平均法による AHP のウェイト推定法が本質的に対数最小二乗法であることに着目し、統計的手法に基づく分析手法についていくつかの視点から述べる。

5.1　寄与率に基づく整合性評価

対数最小二乗法という統計的見地からみた場合、一対比較値のモデルを統計の解析でよく用いられる多変量解析のモデル式の形

$$y=b_0+b_1x_1+\cdots+b_nx_n \tag{25}$$

と対応させて考えることができる[24]。ここで、x_i は説明変数、y は目的変数、b_i は回帰係数である。

簡単のため、$n=3$ の場合についてその考え方を述べる。一対比較行列は

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{w_1}{w_1}e_{11} & \frac{w_1}{w_2}e_{12} & \frac{w_1}{w_3}e_{13} \\ \frac{w_2}{w_1}e_{21} & \frac{w_2}{w_2}e_{22} & \frac{w_2}{w_3}e_{23} \\ \frac{w_3}{w_1}e_{31} & \frac{w_3}{w_2}e_{32} & \frac{w_3}{w_3}e_{33} \end{pmatrix} \tag{26}$$

のように与えられる。このとき、一対比較行列の右上三角の a_{ij} の対数をとったものは以下のようになる。

$$\begin{aligned} \dot{a}_{12} &= \dot{w}_1-\dot{w}_2+\dot{e}_{12} \\ \dot{a}_{13} &= \dot{w}_1-\dot{w}_3+\dot{e}_{13} \\ \dot{a}_{23} &= \dot{w}_2-\dot{w}_3+\dot{e}_{23} \end{aligned} \tag{27}$$

式(27)を多変量解析のモデル式(25)の形に変換すると、

$$\begin{pmatrix} \dot{a}_{12} \\ \dot{a}_{13} \\ \dot{a}_{23} \end{pmatrix}=\dot{w}_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+\dot{w}_2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}+\dot{w}_3\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \dot{e}_{12} \\ \dot{e}_{13} \\ \dot{e}_{23} \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{\text{def}}{=}\dot{w}_1\mathrm{X}_1+\dot{w}_2\mathrm{X}_2+\dot{w}_3\mathrm{X}_3+\dot{\mathrm{E}} \tag{28}$$

となり、$(\dot{a}_{12}, \dot{a}_{13}, \dot{a}_{23})^T$ は、$\mathrm{X}_1=(1,1,0)^T$, $X_2=(-1,0,1)^T$, $\mathrm{X}_3=(0,-1,-1)^T$, $\dot{\mathrm{E}}=(\dot{e}_{12}, \dot{e}_{13}, \dot{e}_{23})$ の線形和として表される。$\dot{a}_{12}, \dot{a}_{13}, \dot{a}_{23}$ の３つを３次元の軸とし、$\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \mathrm{X}_3$ の３つのベクトルを３次元空間上で幾何学的構造を考えてみよう。$\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \mathrm{X}_3$ と単位ベクトル $(1,-1,1)^T$ の内積をとると 0 となる。内積が0ということは、$\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \mathrm{X}_3$ と $(1,-1,1)^T$ が直交しているということである。すなわち、$\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \mathrm{X}_3$ は同一平面上にあることがわかる。

与えられた $(\dot{a}_{12}, \dot{a}_{13}, \dot{a}_{23})^T=\dot{\boldsymbol{a}}$ から平面に対して垂直方向に下ろした点が推定量 $(\hat{\dot{a}}_{12}, \hat{\dot{a}}_{13}, \hat{\dot{a}}_{23})^T=\hat{\dot{\boldsymbol{a}}}$ となる。ただし、$\hat{\dot{a}}_{ij}=\hat{\dot{w}}_i-\hat{\dot{w}}_j$ である。すなわち、対数最小二乗法を用いて $(\dot{e}_{12}, \dot{e}_{13}, \dot{e}_{23})^T$ の大きさを最小にする $(\hat{\dot{a}}_{12}, \hat{\dot{a}}_{13}, \hat{\dot{a}}_{23})^T$ をとっているため、対数をとった空間上で直角三角形を作っていることになる。

AHP は、対数最小二乗法という重回帰モデルと同様の手法を用いて構成できるため、統計的モデルとして扱うことができる。したがって、重回帰モデルで用いられている寄与率が AHP の整合性指標として適用できる。重回帰分析における寄与率とは、回帰式によりどれだけ元のデータの変動を表現できているかを示す指標で

$$R^2=\frac{\sum_{i=1}^{N}(\hat{y}_i-\overline{y})^2}{\sum_{i=1}^{N}(y_i-\overline{y})^2}=\frac{S_R}{S_{yy}} \tag{29}$$

で与えられる。ただし、N：データ数、y_i：観測値、$\overline{y}_i$：観測値の平均、$\hat{y}_i$：推定値とする。

一般的には寄与率の式は上のように変動の比の形になるが、AHP の場合ははじめから基準化がおこなわれた後の式が与えられているため、次のような形になる。

$$R^2=\frac{\sum_{ij:i<j}(\hat{\dot{a}}_{ij})^2}{\sum_{ij:i<j}(\dot{a}_{ij})^2}=\frac{\sum_{ij:i<j}(\hat{\dot{w}}_i-\hat{\dot{w}}_j)^2}{\sum_{ij:i<j}(\dot{a}_{ij})^2} \tag{30}$$

ここで、$\hat{\dot{a}}_{ij}$ は $\dot{a}_{ij}$ からの推定値であり、$\hat{\dot{a}}_{ij}=\hat{\dot{w}}_i-\hat{\dot{w}}_j$ で与えられる。モデルの当てはまりの良さとして寄与率は、整合性を相対誤差評価により示している。一方、対数をとった誤差の平方和 $\sum_{ij:i<j}e_{ij}^2$ は、元のデータから整合性が完全に成り立つ推定値までの距離の二乗であり、整合性を絶対誤差評価により示すことができる。したがって、寄与率と誤差平方和、すなわち相対評価と絶対評価の両面からモデルの良さを検討することができる。

ちなみに、ベクトル表記を用いた場合の寄与率と誤差平方和は以下のように表すことができる。行列 $B=(b_{ij})$ を、$p_k=\dot{a}_{ij}$ であるとき、

$$b_{ki}=1,\ b_{kj}=-1$$

となる行列と定義する。ただし、k 列のこれ以外の要素の値は 0 とする。このとき、R^2 は以下のように定式化することができる。

$$R^2 = \frac{\|\hat{\dot{\boldsymbol{a}}}\|^2}{\|\dot{\boldsymbol{a}}\|^2} = \frac{\|B\hat{\dot{\boldsymbol{w}}}\|^2}{\|\dot{\boldsymbol{a}}\|^2} \tag{31}$$

$$\|\boldsymbol{e}\|^2 = \|\hat{\dot{\boldsymbol{a}}}\|^2 - \|\dot{\boldsymbol{a}}\|^2 = \|B\hat{\dot{\boldsymbol{w}}}\|^2 - \|\dot{\boldsymbol{a}}\|^2 \tag{32}$$

5.2 重み付き最小二乗法によるウェイト推定

対数最小二乗法では、各要素の持つ対数誤差が等分散の分布に従う（等分散性）と仮定している。この仮定は多くの場合現実的であると考えられる。

しかし、一対比較行列の要素は一般に意思決定者の主観にも依存されて決定されるものであるから、“代替案 A と代替案 B の一対比較値と代替案 B と代替案 C の一対比較値では、前者の方がその信憑性が高い”といったような状況が生じることも事実である。すなわち、一対比較を行なう際、意思決定者が自信のある箇所と自信のない箇所があるとすれば、一対比較行列の各要素の持つ誤差分布は異なったものになるはずである。すなわち、等分散に誤差が混入すると仮定するよりも、異なる分散の誤差を仮定することが適切な場合もあろう。従来の対数最小二乗法では仮に一対比較行列において自信のある箇所と自信のない箇所があっても、その値の自信の程度を表わす確信度のような指標をモデルに取り入れることができない。しかし、対数最小二乗法の拡張である重み付き最小二乗法に基づくウエイト推定法を用いれば、異なる分散の誤差を仮定された場合でも合理的にウェイト推定を行うことが可能である[25]。

誤差 $\dot{e}_{ij}$ の分布を

$$E(\dot{e}_{ij}) = 0 \tag{33}$$

$$V(\dot{e}_{ij}) = \sigma_{ij}{}^2 \tag{34}$$

$$\sigma_{ij}{}^2 = \frac{\sigma_0{}^2}{g_{ij}} \quad (\sigma_0{}^2 \text{ は定数}) \tag{35}$$

とすると、

$$\min_w \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g_{ij}\{\dot{a}_{ij} - (\dot{w}_i - \dot{w}_j)\}^2 \tag{36}$$

の条件により推定値 $\hat{\dot{w}}_1, \hat{\dot{w}}_2, \ldots, \hat{\dot{w}}_n$ を求めることができる。また、$\sigma_{ij}{}^2$ は既知ではなくても、$n(n-1)/2$ 個の各一対比較値の誤差分散比が既知であるならば、求められる推定値が最適解となる。ここで、g_{ij} を重みといい、$\sigma_0{}^2$ は単位重量 $(g_{ij}=1)$ のときの分散である。

この重み g_{ij} は“確信度”と定義することができる。誤差分散の大小は“意思決定者の信憑性の有無”として捉えることができ、この重み付き最小二乗法により確信度を考慮したウエイト推定量の算出式が与えられる。

重みつき最小二乗問題は、

$$f(\dot{\boldsymbol{w}}) = \sum_{i<j} g_{ij}(\dot{a}_{ij} - \dot{w}_i + \dot{w}_j)^2 \tag{37}$$

の最小化問題である。ただし、$\dot{\boldsymbol{w}}^T = (\dot{w}_i, \dot{w}_2, \ldots, \dot{w}_n)$ である。

この問題を以下のように書き換える。一対比較値 $\dot{a}_{ij}$ を適当な順序で並べた $n(n-1)/2$ 次元ベクトルを $\boldsymbol{p}$ とする。行列 $B=(b_{ij})$ を次のように定義する。$p_k = \dot{a}_{ij}$ であるとき、

$$b_{ik} = 1$$

$$b_{jk} = -1$$

と定義する。ただし、k 列のこれ以外の要素の値は 0 とする。このとき、式(37)は、次のように書き換えられる。

$$f(\dot{\boldsymbol{w}}) = (A\dot{\boldsymbol{w}} - \boldsymbol{p})^T G (A\dot{\boldsymbol{w}} - \boldsymbol{p}) \tag{38}$$

ここで、G は g_{ij} を対角要素 k の値として持つ対角行列である。ただし、$p_k = \dot{a}_{ij}$ とする。

$Q = B^T GB + \boldsymbol{ee}^T$、ただし $\boldsymbol{e}^T = (1, 1, \cdots, 1)$ とすると、上の問題の一般解は、

$$\dot{w} = Q^{-1}B^{T}Gp + \alpha e \tag{39}$$

とあらわされる。ここで、α は任意の実数である。実際には、指数変換後の $\dot{w}$ の要素の和を 1 とするような値をとる。

5.3　一対比較の欠損値の最尤推定

AHP の一対比較において、ある (i, j) の組み合わせに対する一対比較値が欠損し、一対比較行列が不完全になる場合がある[17]、[18]。以下では欠損を含む不完全一対比較行列を $\tilde{A}$ で表す。式(40)は欠損が起こった行列の例を示す。行列中の？の箇所が欠損しているものとする。

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & 1 & a_{23} & ? \\ a_{31} & a_{32} & 1 & ? \\ a_{41} & ? & ? & 1 \end{bmatrix} \tag{40}$$

式(40)ように一対比較値が欠損し、一対比較行列が不完全になると、Saaty が提案した固有ベクトル法ではウェイトが求まらなくなる。欠損が起こる理由としては

1. 感覚データを扱う際に、判断しにくい場合など一対比較値を決めるのが困難になる。
2. 大規模問題になり、扱う対象の数が多くデータが全部そろわない。

といったことなどが考えられる。このように欠損が生じている場合に、どのようにウェイト推定を行ったら良いであろうか。誤差の入るメカニズムを考慮した対数最小二乗法（LLS）の立場から考えた場合、最尤推定量という視点から推定量を構成することができる。

不完全観測データからの最尤推定量を求めるアルゴリズムとしては、EM アルゴリズムという方法が知られている。EM アルゴリズムは降下法と同様、解を逐次改良していく繰り返しのアルゴリズムであり、ある種の確率モデルの学習においては、大域的最適解への良好な収束性や特に初期段階でのはやい収束性が知られている。音声認識などで活発に議論されている隠れマルコフモデルや混合モデルなどのパラメータ推定のアルゴリズムとして有効な方法といえる。最近では、良い解説論文や文献も揃うようになり、多くの研究がなされるようになっている。

EM アルゴリズムはパラメータ ξ をある適当な初期値に設定し、E-STEP（Expectation　Step）と M-STEP（Maximization　Step）と呼ばれる 2 つの手続きを繰り返すことにより ξ の値を逐次更新する方法であり、次のように定式化される。

1. パラメータの初期値を点 $\xi = \xi^{(0)}$ にとり、$k = 0$ とする。
2. $k = 0, 1, 2, \dots$ に対して 2 つの STEP をくりかえす。

　(a) E-STEP：完全データの対数尤度 $\log f(x \mid \xi)$ の、データ y とパラメータ $\xi^{(k)}$ に関する条件付期待値を求める。すなわち、

$$\begin{aligned} Q(\xi) &= E\left[\log f(X \mid \xi) \mid y, \xi^{(k)}\right] \\ &= \int_{X(y)} f(x \mid y, \xi^{(k)}) \log f(x \mid \xi)\, dx \end{aligned} \tag{41}$$

　を計算する。

　(b) M-STEP：$Q(\xi)$ を最大化する ξ を $\xi^{(k+1)}$ とおく。

なお、不完全データ y が与えられたときの完全データ x の条件付分布は、

$$f(x \mid y, \xi) = \frac{f(x \mid \xi)}{g(y \mid \xi)}, \quad x \in X(y) \tag{42}$$

で与えられる。

以上が E-STEP、M-STEP であり、パラメータの値が収束するまで繰り返す。単峰形の尤度関数の場合にはその収束値が最尤推定値であることが保証されている。

ここで、不完全な一対比較行列から統計的に最尤なウェイトを求めるアルゴリズムを構成してみよう。具体的には AHP に EM アルゴリズムを適用し、E-STEP、M-STEP を構築する。

まず定義した尤度関数より、E-STEP を考える。E-STEPは、パラメータについての条件付期待値を求めるものであるため、求めるウェイト $w=(w_1, w_2, \cdots, w_n)^T$ をパラメータと考えれば、

$$Q^{(k)}(\boldsymbol{w}, \sigma^2)=E_{\mathrm{w}^{(k)}, \sigma^{2(k)}}[\log f(A \mid \dot{\boldsymbol{w}}, \sigma^2) \mid \tilde{A}] \tag{43}$$

を求めることになる。ただし、$\tilde{A}$ は与えられた不完全な一対比較行列であるとする（すなわち、EM アルゴリズムにおける不完全データに対応する）。

本稿では以下簡便のため σ^2 を既知とし、

$$B=\{(i, j) \mid a_{ij} \text{ が得られている}\} \tag{44}$$

$$\overline{B}=\{(i, j) \mid a_{ij} \text{ が欠損}\} \tag{45}$$

$$B \cup \overline{B}=\{(i, j) \mid i<j\} \tag{46}$$

とすると。このとき、

$$Q^{(k)}(\boldsymbol{w})=\sum_{(i,j) \in B} \log f(\dot{a}_{ij} \mid \dot{\boldsymbol{w}}) + E_{\mathrm{w}^{(k)}}[\sum_{(i,j) \in B} \log f(\dot{a}_{ij} \mid \dot{\boldsymbol{w}}) \mid \tilde{A}] \tag{47}$$

と分解でき、期待値操作が得られる。

容易に分かることであるが、E-STEP は $(i, j) \in \overline{B}$ に対し $\dot{a}_{ij}^{(k)}=\dot{w}_i^{(k)}-\dot{w}_j^{(k)}$ より、$\dot{a}_{ij}^{(k)}$ を求めることが E-STEP となる。そのような $\dot{a}_{ij}^{(k)}$ を使って、$Q^{(k)}(\boldsymbol{w})$ は

$$Q^{(k)}(\boldsymbol{w})=\sum_{(i,j) \in B} \log f(\dot{a}_{ij} \mid \dot{\boldsymbol{w}}) + \sum_{(i,j) \in \overline{B}} \log f(\dot{a}_{ij}^{(k)} \mid \dot{\boldsymbol{w}}) \tag{48}$$

と与えられる。

次に M-STEP は、E-STEP で得られた $Q^{(k)}(\boldsymbol{w})$ を最大化する $\boldsymbol{w}$ を求め、$\boldsymbol{w}^{(k+1)}$ とすることになる。ここで、$\dot{e}_{ij}$ が正規分布に従うと仮定しているために、最尤推定を行なうことは $\dot{\boldsymbol{w}}$ の最小二乗推定を行なうことと等価となる。先述のように、完全な一対比較行列からの最小二乗法の解は幾何平均で与えられる。

よって、得られた $a_{ij}^{(k)}$ を元の行列の欠損部分に代入し、その行列の幾何平均を求め、

$$\dot{\boldsymbol{w}}^{(k+1)}=\left(\dot{w}_1^{(k+1)}, \dot{w}_2^{(k+1)}, \ldots, \dot{w}_n^{(k+1)}\right)^T \tag{49}$$

とすることが M-STEP となる。以上が、E-STEP、M-STEP である。

また、このアルゴリズムの終了条件は

$$\|\dot{\boldsymbol{w}}^{(k)}-\dot{\boldsymbol{w}}^{(k+1)}\|<\epsilon \tag{50}$$

とすればよい。ただし、ϵ は事前に設定する値である。このアルゴリズムにより尤度は単調増加する。

アルゴリズムをまとめると、次のようになる。

1. 初期値 $\boldsymbol{w}^{(0)}$ を決め、$k=0$ とする。
2. E-STEP
   $a_{ij}=w_i/w_j$ に $\boldsymbol{w}^{(k)}=\left(w_1^{(k)}, w_2^{(k)}, \ldots, w_n^{(k)}\right)^T$ を代入し，欠損箇所について $a_{ij}^{(k)}=w_i^{(k)}/w_j^{(k)}$ を求める。
3. M-STEP
   E-STEP で得られた $a_{ij}^{(k)}$ を欠損個所に代入した行列 $A^{(k)}$ から、幾何平均によりウエイトを求め、$\boldsymbol{w}^{(k+1)}$ とする。
4. 収束条件を満たせば終了。満たさなければ $k=k+1$ として 2 へ戻る。

という簡単なアルゴリズムとなる。EM アルゴリズムを用いた AHP のウェイト推定法は、厳密に最尤推定量が得られることが示されている[26]。

6　おわりに

本稿では、AHP のモデルについて概観し、対数最小二乗法に基づく評価値（ウェイト）推定法について、統計学的視点から導かれるいくつかの整合性評価指標、ウェイト推定法を示した。AHP という手法はその適用対象によって用いるべき推定法は異なると考えられる。人間の主観的判断をモデル化するような場合に、固有ベクトル法を用いるべきか、

幾何平均法（対数最小二乗法）を用いるべきかという問題については、適用例からの帰納的な方法によって評価を定めていく必要があろう。実際には、AHP では通常の統計学的な仮定は成り立たないと見るのが一般的のようである。しかし、それ自体が幾何平均法を全否定するものではない。

しかしながら、多変量解析と同様に、推定された AHP モデルが現実をどのようにモデル化できているか、あるいはそのモデルの精度はどの程度か、といったモデルの整合性評価はなるべく多角度から行われる方が良い。その意味で、統計学的なアプローチは一つのモデル検証の方法群を与えるものと考えられる。これらの手法の評価については、現在も研究が進められている段階である。さらなる研究によって、これらの議論がさらに突き詰められることを期待したい。

参考文献

［1］Saaty, T. L.,“The Analytic Hierarchy Process”, McGraw-Hill, 1980.

［2］木下栄蔵：AHP の理論と実際，日科技連，2000.

［3］加藤　豊，小沢正典：OR の基礎－AHP から最適化まで－，実教出版，1998.

［4］刀根　薫：ゲーム感覚意思決定法，日科技連，1995.

［5］高橋磐郎：“AHP から ANP への諸問題Ⅰ～Ⅵ”，オペレーションズ・リサーチ，1月～6月，1998.

［6］西澤一友,“Bradley-Terry モデルによる固有値法と幾何平均の比較”，日本 OR 学会2001年度春季研究発表会アブストラクト集，pp248－249，2001.

［7］加藤　豊，小澤正典,“調和平均法による AHP”，第58回品質管理学会研究発表要旨集，pp59－62，1998.

［8］小澤正典，加藤　豊,“AHP における一対比較の整合性の評価”，日本 OR 学会2000年度春季研究発表会アブストラクト集，pp106－107，2000.

［9］E. F. Lane, W. A. verdini :“A Consistency Test for AHP Decision Makers”, Decision Sci. 20, pp.575-pp.590, 1989

［10］F. A. Lootsma :“Conflict Resolution via Oairwise Comparison of Concessions”, Europian Journal of Operational Research 40, pp.109-pp.116, 1989

［11］加藤　豊，小澤正典,“AHP における一般平均法のパラメータと誤差”，日本 OR 学会2000年度秋季研究発表会アブストラクト集，pp296－297，2000.

［12］加藤豊、小澤正典,“一対比較行列のベキ等性による整合度と系統的誤差”，日本 OR 学会2001年度春季研究発表会アブストラクト集，pp238－239，2001.

［13］藤原浩史，幸田武久，井上紘一,“AHP における新しい整合度とその応用”，計測自動制御学会論文集，Vol31．No 9，1502／1509，1995.

［14］三宅千香子，西澤一友，篠原正明,“AHP ウエイト推定時の整合度指標の比較評価”，日本 OR 学会2001年度春季研究発表会アブストラクト集，pp242－243，2001.

［15］西澤一友,“整合性の改善方法とその評価”，日本 OR 学会2000年度春季研究発表会アブストラクト集，pp218－219，2000.

［16］水野欽司：多変量データ解析講義，朝倉書店，1996.

［17］西澤一友,“不完全情報における欠落要素の推定”，日本 OR 学会2001年度春季研究発表会アブストラクト集，pp246－247，2001.

［18］西澤一友,“AHP 不完全情報の推定法の評価”，日本 OR 学会2001年度秋季研究発表会アブストラクト集，pp196－197，2001.

［19］西澤一友,“整合性とファジィ性”，木下栄蔵　編著，AHP の理論と実際，pp105－130，日科技連，2000.

［20］杉原一臣，前田　豊，田中英夫,“区間データの可能性 AHP モデル”，京都大学数理解析研究所　不確実・不確定性のもとでの数理的決定理論研究集会報告集，No.1132－5，2000.

［21］田村坦之，高橋　理，鳩野逸生，馬野元秀,“階層化意思決定法の記述的モデルの提案と選考順位逆転現象の整合的解釈”，Jounal of the Operations Research Socity of Japan, 41-2, pp214-228, 1998

［22］K. Sekitani and N. Yamaki :“A Logical Interpretation for Eigenvalue method in AHP”, Journal of the Operations Research Society of Japan, Vol.42, pp.219-232, 1999

［23］関谷和之：“AHP と固有値問題”，木下栄蔵　編著，AHP の理論と実際，pp. 161－182，日科技連，2000

［24］浦野真穂，後藤正幸，平澤茂一,“AHP の幾何学的考察と整合性評価”，日本経営工学会2001年度春季研究発表会予稿集，pp173－174，2001.

［25］村山直人，後藤正幸，俵　信彦：“重み付き最小二

乗法を用いた AHP のウエイト推定法に関する研究", 日本経営工学会論文誌, Vol. 53, No. 5, pp. 368−377, 2003.
[26] 後藤正幸, 松嶋敏泰, 平澤茂一: "EM アルゴリズムに基づく AHP の評価値算出法について", 2000年情報論的学習理論ワークショップ予稿集 (静岡), pp. 239−244, 2000.