The 27th Symposium on Information Theory
and Its Applications (SITA2004)
Gero, Gifu, Japan, Dec. 14–17, 2004

多段階在庫の汎用性に関する情報理論的考察

Information Theoretic Consideration of Multi-Layered Inventory Process

後藤 正幸 * 増井 忠幸 * 平澤 茂一 †
Masayuki GOTO, Tadayuki MASUI Shigeichi HIRASAWA

Abstract— In this paper, the models of multi-layered inventory process are proposed from the view point of information theory. The physical distribution is a main activity of many companies and very important. Recentry, the effectiveness of supply chain management between companies is discussed and new value chain model named CTO (Configure to Order) appeared. In this paper, we discuss several models of value chain model and analyze the properties of stock.

Keywords— multi-layered inventory process, supply chain, value chain, logistics system, information theoretic approach

1 はじめに

複雑なビジネスプロセスの一つである物流プロセスやサプライチェーンでは，効率的なモノの流れを実現するための様々な研究がなされてきた [1, 2]．これらの研究では，情報共有の有効性（情報の価値）が指摘されている [3]．企業活動の中でも，物流の重要性はますます認識されるようになっており，情報システムを援用した強力な物流システムやサプライチェーンを構築し，効率的な流通を実現することが製造業の生き残りにとって不可欠であるとも言われている [4]．一方，デルコンピュータ社によるビジネスモデルとして広く知られる CTO (Configure to Order：受注仕様組立生産) というバリューチェーンモデルが成功した事例は良く知られている．現在では，一般的なモデルとして，ETO (Engineer to Order：受注設計生産)，BTO (Build to Order：受注加工組立生産) などといった，予測主導投資段階と注文対応実現段階を切り分ける地点によって，モデルを分類する提案がなされている [5]．

このような流れにより，在庫をなるべく持たず，かつ消費者の要求に応じたカスタマイゼーションを行うビジネスモデルの重要性が認識されるようになった．そのビジネスモデルの本質は，消費者が組み立てられた完成品を販売店で手に取り，目で確かめて購買行動を起こすのではなく，消費者から希望するオプションと注文が受け付けられた後に，短いリードタイムで製品がカスタマイズ，組み立てられて届けられる点にある．すなわち，消費者にとっては，自分自身のオリジナル製品を注文するかのような気分で購入し，一方でメーカ側は消費者のリードタイムの要求水準をギリギリ達成可能な工程まででパーツをストックし，注文があってから初めてそれ以後の組み立てを行うのである．これにより，販売における売れ残りリスクを軽減すると共に，消費者の嗜好の多様化に対応することが可能であり，何よりもキャッシュフロー面でも優位性が高い．このような “注文が確定するまで，なるべく作り置きしない” という考え方は，在庫の処分費用を低減する反面，需要変動に追従するバッファ機能をも低減させるため，機会損失につながりかねない．とくに，食品などの製品では，未だ消費者が食品

*224-0015 横浜市都筑区牛久保西 3-3-1 武蔵工業大学 環境情報学部（Musashi Institute of Technology, Fac.of Environmental and Information Studies），E-mail: goto@yc.musashi-tech.ac.jp
†早稲田大学 理工学部（Waseda University, School of Science and Engineering）

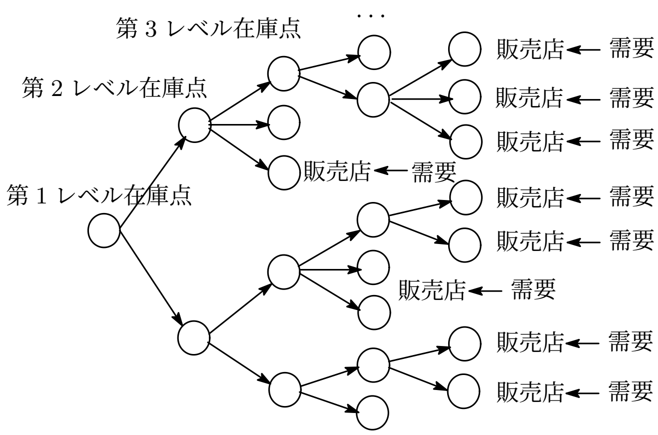

図 1: 多段階在庫モデルの例

販売店で製品を手にとって購買を決める購入スタイルも主流であり，その意味で廃棄ロスは避けて通れない．一方，“廃棄” という行為は，その製品，あるいは仕掛品が，以後いかなる企業価値をも生み出さないと確定したケースで生じる．もし，パーツが他の製品に転用できる状態であれば，廃棄する必要はなく，企業にとって何らかの価値創造につながる可能性が残されている．このように，在庫の様々な用途への利用可能性を “在庫の汎用性” と呼ぶことにする．一般に，原材料から完成製品に至る製造プロセスや物流プロセスは汎用性を低下させる行動であり，汎用性を低下させることで，ある特定の消費者にとって価値のある製品へと変化していく．一連のビジネスプロセスをこのような “汎用性” の視点から正しくモデル化し，“どのレベルの汎用性で在庫を保持するべきか” について議論する．

本稿では，このような在庫の汎用性の概念を，曖昧性の尺度としてのエントロピーにより表現し，情報理論的な観点から定式化してその性質を解析することにより，以上の多段階在庫モデルの本質について考察を与える．汎用性を考慮した多段階在庫モデルの一般形が，Tree 構造で表現できることを示し，その性質を議論することで，情報理論的な考察によって多段階在庫モデルのエッセンスが解明できると考えている．

2 多段階在庫モデルと Tree 構造

本稿で仮定する多段階の在庫モデルを図 1 に示す．これは，バリューチェーンと考えても良い．各ノードは在庫点を表し，ここに保有される在庫は需要量の変化に応じるためのバッファとしての機能を有する．

中間ノードにおける在庫は，その後，どの販売店に送られるかは決まっていない．すなわち，中間ノード（各レベルの在庫点）の在庫は，汎用性を有する．このように，通常の流通プロセスにおける在庫の問題は，情報理論でよく用いられる tree 構造によって表現することがで

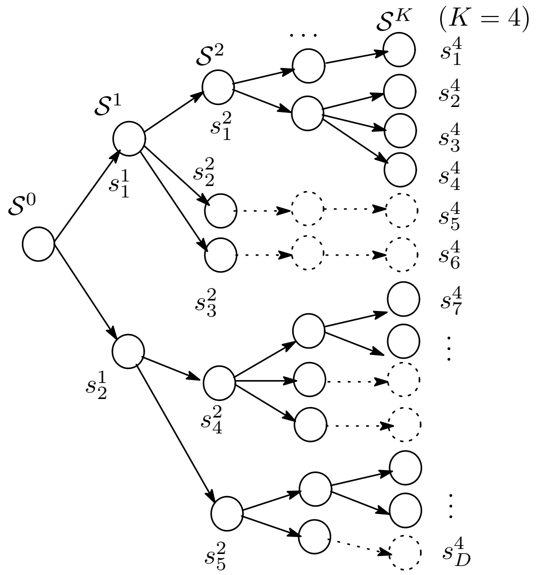

図 2: 多段階在庫モデルの例

きる．最終レベルの販売店数を D とする．

3　在庫の汎用性と条件付エントロピー

ここでは，この tree モデルによる多段階在庫モデルを情報理論的な観点から分析するために，総需要量を 1 として基準化した重み（確率）によって表現することにする．ルートノードを $\mathcal{S}^0$, 第 1 レベルのノードの集合を $\mathcal{S}^1$, 第 2 レベルのノードの集合を $\mathcal{S}^2$, $\cdots$, とおき，$\mathcal{S}^k$ $(k=1,2,\cdots,K)$ の要素を s_j^k $(j=1,2,\cdots)$ とする．ただし，図 1 にあるように，最大深さ K が既知で固定の場合，第 K レベルの葉を持たないパス，すなわち第 $K-1$ レベル以前に葉ノードが出現するパスについては，これらの葉からノード数 1 の枝を順次伸ばし，全てのパスは第 K レベルの葉を持つものとする（点線のパスとノード）．

ここでは，ある定常状態における販売店の平均需要を考え，これを各葉ノードの需要と定義する．在庫点を表すノード s_j^k の需要を，そのノードの子孫である葉の需要の総和で表す．$\mathcal{S}^k$ 内に実現値を取る確率変数を X_k で表し，その確率分布は，各ノードの需要を全葉ノードの需要の総和で割り基準化した値を確率とする離散確率で表されるものとしよう．すなわち，

$$p_j^k = Pr\{X_k = s_j^k\} = \frac{d_j^k}{\sum_i d_i^k} \tag{1}$$

$$d_j^k = \sum_{s_i^K \in \mathcal{D}_j^k} d_i^K \tag{2}$$

ここで，$\mathcal{D}_j^k$ は s_j^k の子孫である葉ノード全体からなる集合，d_i^K は葉ノード s_i^K の需要量を表す．また，任意の k に対して $\sum_j d_j^k = \sum_i d_i^K$ である．また，X_k の実現値を x_k で表す（$x_k \in S_k$）．

このとき，中間在庫の汎用性を次のように定義する．

定義 1 木の深さ K に対し，$K \geq k$ として，$H(X_K|s_j^k)$ をノード s_j^k の在庫の汎用度と呼ぶ．また，$H(X_K|X_k)$ を第 k レベル在庫の汎用度とよぶ．　□

定義 1 の意味するところは，“第 k レベルのノードに存在する在庫が，その後どの末端ノードに達するか” に関する不確実性を表す指標として，在庫の汎用性を定義しているということである．

通常，現実の在庫問題においては，どこに在庫拠点を持つか，という問題が大きな意思決定課題となる．これは図 2 の木構造で言えば，末端の葉ノードの確率が既知のもとで，どのような木構造を構成するか? という問題に帰着する．”中間在庫の汎用性を保持したい” という観点からすれば，

$$\sum_{k=1}^{K-1} H(X_K|X_k) \tag{3}$$

を最大にする戦略が妥当であることが伺える．

ここでは，このような現実を表現するための制約条件として，次のような設定を考えよう．

条件 1
1. 木の深さ K は既知であるとする．
2. 第 K レベルの葉ノード数とそれらの確率は所与である．（X_K の確率分布が既知）
3. 第 2 レベルから第 $K-1$ レベルのノード数は可変であり，任意に設定可能である．
4. $k=1,2,\cdots,K-2$ に対し，各ノードから子ノードへのリンクは任意に設定可能である．

この仮定は，販売店はすでに存在し，各販売点へ搬送を行う倉庫や物流センターの設置数も，可能資本の面から決定済みであることを述べている．この条件の中で，各センターからどの需要地へモノを配送するべきか，という問題を情報量を用いて最適化する方法を考える．この仮定のもとで，それらの倉庫への搬送を行う物流センター拠点をどのように配置すべきか? を考える極めて一般的かつ本質的な問題は，汎用性の和を最大化する木構造を見つける問題として定式化できる．

この時，自明に以下の定理が成り立つ．

定理 1 条件 1 を仮定する．このとき，様々な木構造に関して，在庫の汎用度

$$\sum_{k=1}^{K-1} H(X_K|X_k) \tag{4}$$

の最大化は，

$$\sum_{k=1}^{K-1} H(X_k) \tag{5}$$

の最小化と等しい．

(証明) $H(X_k|X_K) = 0$ を用いて，$\sum_{k=1}^{K-1} H(X_K|X_k)$ を展開すれば，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{K-1} H(X_K|X_k) &= \sum_{k=1}^{K-1} \{H(X_K) - H(X_k)\} \\ &= (K-1)H(X_K) - \sum_{k=1}^{K-1} H(X_k)\end{aligned} \tag{6}$$

となることから自明．　□

この性質の意味するところは，第 $K-1$ レベルまでは 1 本の枝で連なったパスで，最後に全ての葉ノードに

分岐するような特殊な木構造が，在庫の汎用性の面からは最適である，ということを述べている．このモデルでは，バリューチェーンのプロセスの最終段階まで，消費先が決定されないという意味で在庫の汎用性が保持されており，確かに汎用性の面では最適であることが直感的にも理解できる．

系 1 在庫木の深さ K と X_K の確率分布を固定し，さらに各 m レベルのノード数 $|\mathcal{S}^k|$, $(k = 1, 2, \cdots, K-1)$ を固定する．このとき，(3) 式の在庫の汎用度を最大化する木構造は，以下のアルゴリズムで与えられる．

1. (Step1) $k = 1$, $\mathcal{C} = \mathcal{S}^K$ とする．
2. (Step2) $\mathcal{C}$ から確率 p_j^k の小さいものから順に $|\mathcal{S}^k| - 1$ 個を選び，その集合を $\mathcal{B}$ とする．
3. (Step3) 第 k レベルのノード $s_2^k, s_3^k, \cdots, s_{|\mathcal{S}^k|}^k$ からそれぞれ $\mathcal{B}$ の各葉ノードに *1* 本のパスで葉に辿り着くように対応付けする．
4. (Step4) $\mathcal{C} = \mathcal{C} - \mathcal{B}$
5. (Step5) $k < K-1$ であれば，$k = k+1$ として，Step2 へ戻る．$k = K-1$ であれば，$\mathcal{C}$ の要素全てをノード s_1^{K-1} とリンクさせて終了． □

このように，在庫の汎用性のみに着目した場合には，極めて特異な木構造が最適になることがわかる．ただし，現実的にはこのような構造を取ることはない．これは汎用性の他に考慮すべき重要な目的関数があり，重要視されているためである．従って，他の目的関数を適切なレベル保ちつつ，在庫の汎用性を最大化することは，製品ライフサイクルの短い現在のビジネスモデルの視点からはたいへん重要である．

4 各レベルにノード数制限がある場合の物流プロセス最小化問題

ここでは，木の最大深さ K を未知と仮定する．また，一般に流通センターや倉庫は，キャパシティの大きな設備を設置するためには多大なコストがかかる．したがって，大量の物量を取り扱う上位レベルの中間ノードは少なく，比較的少量を取り扱う下位レベルのノードは多く設置できるという状況で，できるだけ流通プロセスの長さを短くする問題を考える．

レベル k の在庫点の最大設置可能数を設置する代わりに，レベル k における親ノードからの最大可能分岐数を与え，これを V_k としよう．通常，$V_1 \leq V_2 \leq V_3 \leq \cdots$ である．以下では，この制約のもとで，最大プロセス長（木の最大深さ），および平均プロセス長（平均深さ）を最小化する問題を定式化する．この問題は符号化の問題と類似しているが，木の分岐数が固定でなく，レベルによって違う点で異なる．

ここで，l_i は 第 i 需要地までのプロセス長さ，すなわち木の深さを表すものとする．また，p_i をその確率とする．このとき，クラフトの不等式の一般形として次の定理が成り立つ．

定理 2 レベル k における親ノードからの最大可能分岐数を V_k としたとき，D 個の需要地に対し，経路長がそれぞれ $l_1, l_2, \cdots, l_D$ となるような物流プロセスが存在するための必要十分条件は

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^{l_1} V_i} + \frac{1}{\prod_{i=1}^{l_2} V_i} + \cdots + \frac{1}{\prod_{i=1}^{l_D} V_i} \leq 1 \qquad (7)$$

となることである． □

4.1 最大プロセス長最小化問題

ここでは，木の最大深さを最小化する問題を考える．すなわち，全ての需要地を考えた時に，最も最悪のケースを最適化しようとする戦略である．このとき，最適な木構造は次の手順で与えられる．

[最適木生成アルゴリズム]

1. (Step1) 葉を確率の小さい順に並べ替える．$p_1 \leq p_2 \leq \cdots \leq p_D$ とする．
2. (Step2) $\prod_i^n V_i \leq D < \prod_i^{n+1} V_i$ となる n を探し，$j = 0$,$k = 1$, $D' = |D - \prod_i^n V_i|$ とする．
3. (Step3) $N = \min\{D' + k, V_{n+1}\}$ として，$p_{j+1}, p_{j+2}, \cdots, p_{j+N}$ に対し，1 つのノードを作り，このノードとこれらの葉を枝で結ぶ．$N = D' + k$ であれば (Step5) へ．
4. (Step4) $N = D' + k$ であれば (Step5) へ．そうでなければ，$j = j + N$, $k = k+1$, $D' = D' - V_{n+1}$ として，(Step3) へ戻る．
5. (Step5) 残りの $p_{j+N+1}, p_{j+N+2}, \cdots, p_D$ を第 n レベル完全木の葉に割り当てる．
6. (Step6) (Step5) で割り当てられなかった葉は中間ノードとし，それらに (Step3) で生成したノードを対応させ，$p_{j+1}, p_{j+2}, \cdots, p_{j+N}$ を $n+1$ レベルの葉として終了． □

定理 3 最大可能分岐数 V_k が与えられたもとで，上記のアルゴリズムは最大経路長（最大プロセス長）を最小化する意味で最適であり，最大経路長及び平均経路長（平均プロセス長）は，

$$\sum_{i=1}^{N} \log V_i \geq \log D$$

をみたす N で上界される． □

もし，$V_1, V_2, \cdots$ が線形オーダであり，適当な V と α を用いて，$V_1 = \alpha V$, $V_2 = \alpha^2 V$, $V_3 = \alpha^3 V$, $\cdots$ と表されるときは，最大プロセス長 K は

$$K \leq \left\lceil \frac{-\log_V \alpha - 2 + \sqrt{8 \log_V \alpha \log_V D}}{2 \log_V \alpha} \right\rceil \qquad (8)$$

でバウンドされることもわかる．

4.2 平均プロセス長最小化問題

ここでは，平均プロセス長さ

$$L_1 = \sum_{i=1}^{D} l_i p_i \qquad (9)$$

を最小化する在庫木を考えよう．予め葉を確率の小さい順に並べ替え，$p_1 \leq p_2 \leq \cdots \leq p_D$ を仮定しておく．このとき，(9) 式を最小化する最適木は以下の条件をみたす．

定理 4 各レベルの最大分岐可能数が $V_1 \leq V_2 \leq V_3 \leq \cdots$ のように与えられているもとで，(9) 式で表される平均プロセス長さを最小化する最適木は次の性質をみたす．

1. $p_i > p_j$ ならば $l_i \leq l_j$

2. 確率の等しいノードのレベルは同じか，違っても 1 つである．
3. 2 つの確率分布 $\mathbf{p}$, $\mathbf{p}'$ に対する平均プロセス長をそれぞれ L, L' とする．このとき，$\mathbf{p}$ より $\mathbf{p}'$ の方が平坦であれば，$L \le L'$ である．
4. 次の不等式

$$\sum_{i=1}^{k} V_i - k + 1 \ge D \tag{10}$$

をみたす最小の k を K_U とすると，最適木の最大深さ K は，$K \le K_U$ をみたす．
5. 最適木が完全木のとき，葉の個数は，適当な非負整数 $m_2, m_3, \cdots, m_{K_U}$ の組を用いて，

$$V_1 + m_1(V_2 - 1) + m_2(V_3 - 1) + \cdots + m_{K_U}(V_{K_U} - 1)$$

の形で表される．
6. T_{N-1} を中間ノード数 $N-1$ の $p_1, p_2, \cdots, p_D$ に対する最適木とし，p_1 の葉のレベルを l とする．このとき，最小確率 p_1 の葉を分割し，確率 p_1', p_2', $\cdots$, $p_{V_{l+1}}'$ の確率を持つ V_{l+1} 個の葉を追加した木 T_N は，$\{p_1', p_2', \cdots, p_{V_{l+1}}', p_2, p_3, \cdots, p_D\}$ に対する最適木である． □

以上の性質から，最適木は以下の手順で与えられることがわかる．

[最適木生成アルゴリズム]

1. (Step1) 葉を確率の小さい順に並べ替える．$p_1 \le p_2 \le \cdots \le p_D$ とする．$D \le V_1$ であれば，全ての葉ノードをレベル 1 の葉に割り当てて終了．
2. (Step2) (10) 式を満たす最小の k を K_U とする．
3. (Step3) $i = 2, 3, \cdots, K_U$ に対し，$q_i = p_1 + p_2 + \cdots + p_{V_i}$ を計算し，$\mathcal{Q}_i = \{q_i, p_{V_i+1}, p_{V_i+2}, \cdots, p_D\}$ と確率 $p_1, p_2, \cdots, p_{V_i}$ の葉を同じ中間ノードからの子とする部分木をあわせて $\mathcal{C}_i$ とする．集合の集合 $\mathcal{R} = \{\mathcal{C}_i\}$ を保持する．
4. (Step4) $\mathcal{R}$ 内の各 Q_i の要素を小さい順に並び替え，q_i の昇順での番号を t_i とする．これらを新たに，$p_1 \le p_2 \le \cdots$ として $\mathcal{Q}_i$ と置き換える．
5. (Step5) $\{\mathcal{C}_i\}$ の全要素集合について，$V_j < t_i$ をみたす $j = 2, 3, \cdots, K_U$ に対し，$q_j^i = p_1 + p_2 + \cdots + p_{V_j}$ を計算し，$\mathcal{Q}_j^i = \{q_j^i, p_{V_j+1}, p_{V_j+2}, \cdots, p_D\}$ とする．$\mathcal{R}$ に，新たに $\mathcal{Q}_j^i$ を追加する．
6. (Step6) $\{\mathcal{C}_i\}$ の全要素集合について，$t_i \le V_{i-1}$ をみたす i が存在すれば，$q^i = p_1 + p_2 + \cdots + p_{V_{i-1}}$ を計算し，$\mathcal{Q}^i = \{q^i, p_{V_{i-1}+1}, p_{V_{i-2}+2}, \cdots, p_D\}$ として，$\mathcal{R}$ から $\mathcal{C}_i$ を削除し，$\mathcal{Q}^i$ と q^i を表す部分木をあわせて $\mathcal{R}$ に追加する．
7. (Step7) (Step4) ～ (Step6) を葉がなくなるまで繰り返し，最終的に出来上がった $\mathcal{R}$ から平均経路長最小の木を選んで終了． □

5　制約付きの在庫汎用性最適化

前節では，在庫の汎用性にのみ着目した議論を行ったが，現実問題としてはより重要な評価関数がある．末端の販売拠点における調達時間（リードタイム）である．通常，首都圏では地方に比べて需要量が多い．従って，物流センターや倉庫は首都圏に近い方が，首都圏の需要に対するリードタイムは短くなるはずである．このように現実には，需要地までの距離などを考慮する必要があり，従って与えられた末端葉ノードの確率分布に対して，在庫点を表す中間ノードを含めた木全体の構造を任意に選択することができない．リードタイムなどのサービスレベルが一定条件をみたすなどの何らかの制約条件のもとで，汎用性を最大化することになる．

一方，これまで需要は平均値を用いた議論を展開してきたが，現実には需要の変動に対応可能な形態が必要である．在庫点設置の目的の一つに，多数の需要地における需要変動にそれぞれ個別対応するのではなく，複数の販売拠点の需要をまとめて管理することにより，需要変動の標準偏差を低減させることがある．これにより，発注量を安定化させ，平均在庫量を低減させることができるのである．次に，これを表現する評価関数を導入しよう．

定義 2 木の深さ K に対し，$K > k \ge 1$ として，

$$H(X_{k+1}|s_j^k) \tag{11}$$

をノード $s_j^k \in \mathcal{S}_k$ における在庫の分割度と呼ぶ．また，これらの和

$$\sum_{s_j^k \in \mathcal{S}_k} H(X_{k+1}|s_j^k) \tag{12}$$

を第 k レベル在庫の分割度とよぶ．

多くの需要をひとまとめにし，需要変動を吸収することで，発注の安定化と在庫量低減を図るためには，この在庫の分割度は大きい方が良い．これにより，下位の在庫点 1 つ 1 つの需要量が大きく，等分割されるようになるためである．この評価関数を用い，$L_2 = \sum_{k=1}^{K-1} \sum_{s_j^k \in \mathcal{S}_k} H(X_{k+1}|s_j^k)$ を最大化する最適木探索問題を定式化することができる．しかしながら，このような戦略は節 4.2 で定式化した問題と等価であることがわかる．

6　おわりに

本稿では，多段階在庫モデルにおける在庫の汎用性を，曖昧性の尺度としてのエントロピーで定義し，本質的な性質について議論を行った．本稿では，需要に確率過程を仮定しない静的な側面のみを扱ったが，在庫管理は本質的には制御問題であり，今後，情報理論的な視点からの理論構築が可能であると考えられる．

本研究の一部は，日本学術振興会 科学研究費補助金 基盤研究 (B)(2) 15310123 の助成による．

参考文献

[1] ダイヤモンド・ハーバード・ビジネス編集部 編：サプライチェーン理論と戦略, ダイヤモンド社, (1998)
[2] 今岡善次郎： サプライチェーンマネジメント, 工業調査会, (1998)
[3] D. スミチ・レビ, E. スミチ・レビ, P. カミンスキ，久保幹雄 監修訳： サプライチェーンの設計と管理－コンセプト・戦略・事例， 朝倉書店，(2002)
[4] 吉原賢治： 情報型ロジスティックス構築論, NTT 出版, (1995)
[5] 松島克守： MOT の経営学, 日経 BP 社, (2004)
[6] 国沢 清典: エントロピーモデル, 日科技連, (1979)
[7] 堀部 安一: 情報エントロピー論, 森北出版, (1992)
[8] 韓 太舜, 小林欣吾: ”情報と符号化の数理”, 岩波書店, (1994)
[9] 平澤茂一: 情報理論, 培風館, (1997)