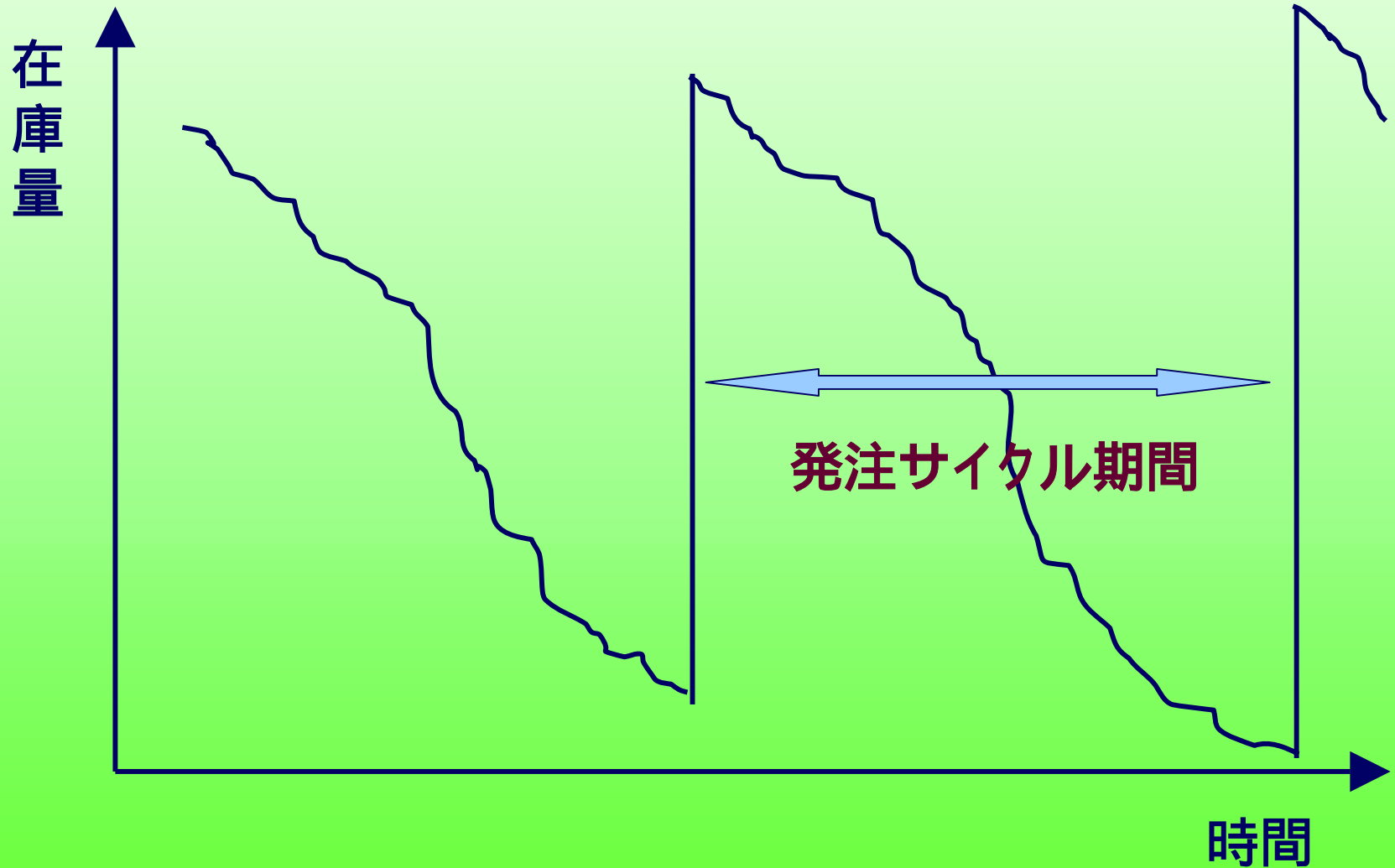


定期発注法で学ぶ最適制御理論

助手 後藤正幸

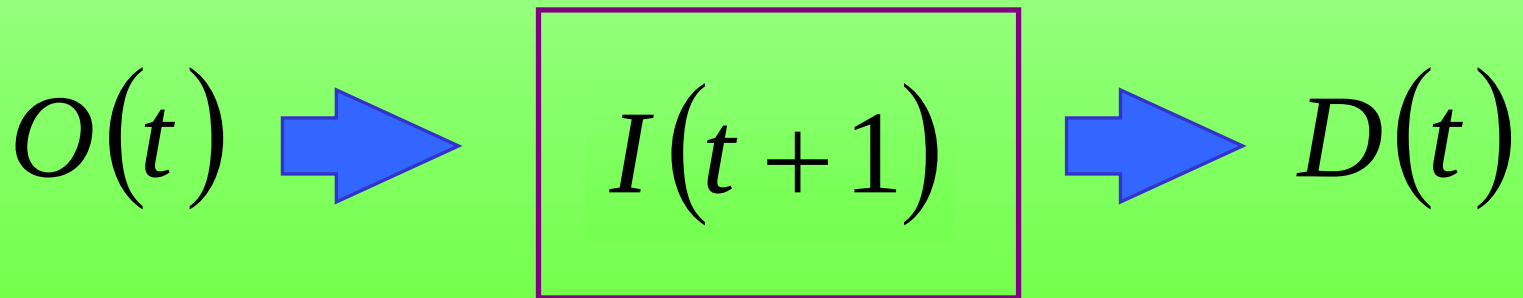
在庫管理における定期発注法



単一工程の即納の場合の定期発注モデル

$$I(t+1) = I(t) + O(t) - D(t+1)$$

$t+1$ 期の在庫量 t 期の在庫量 t 期の発注量 $t+1$ 期の需要量



需要のモデル

平均値の周りでランダム変動するモデル

$$D(t) = \mu + \varepsilon(t)$$

一次の記憶が存在するモデル

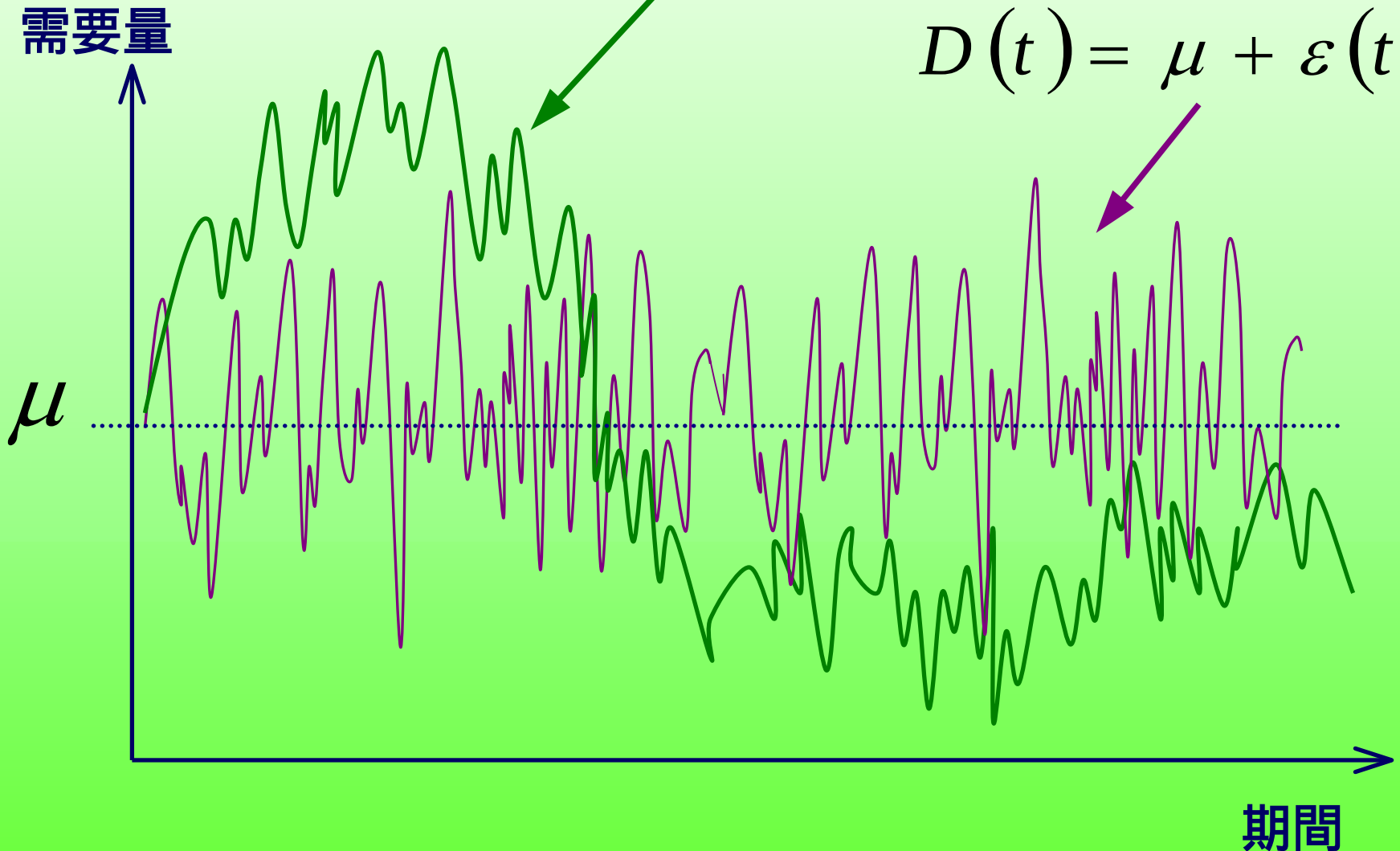
$$D(t) = \mu + \lambda \{D(t-1) - \mu\} + \varepsilon(t)$$

$$\mu \sim N(0, \sigma^2)$$

需要のモデル

$$D(t) = \lambda \{D(t-1) - \mu\} + \varepsilon(t)$$

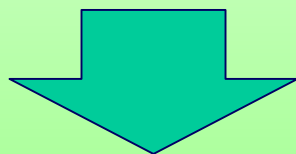
$$D(t) = \mu + \varepsilon(t)$$



在庫管理の目的

- 平均在庫量を出きるだけ少なくしたい

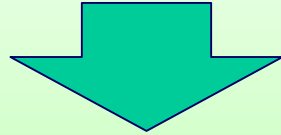
$$I(t+1) = I(t) + O(t) - D(t+1)$$



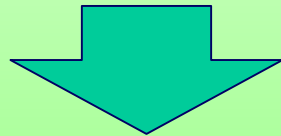
そのためには、発注量 $O(t)$ をどのように決定したらよいか？

在庫量を制御変数とした制御問題

もし需要の予測量だけ発注すると、、、



予測量以上に売れたときに品切れ！



安全在庫量とは

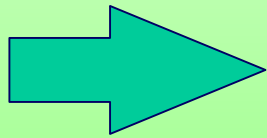
- ・ 品切れ率を減らし、機会損失を回避するため、ある程度の在庫水準 S を保持する

在庫の制御問題としての認識

ここでは確率的に変動するものと仮定

需要量

$D(t+1)$ はある程度の不確実性をもって変動する



発注量

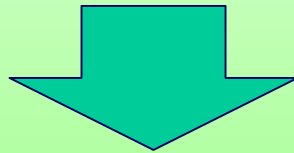
$O(t)$ をうまく決めてやることで、

在庫量

$I(t)$ を目標値である s に出切るだけ近づけたい

評価基準

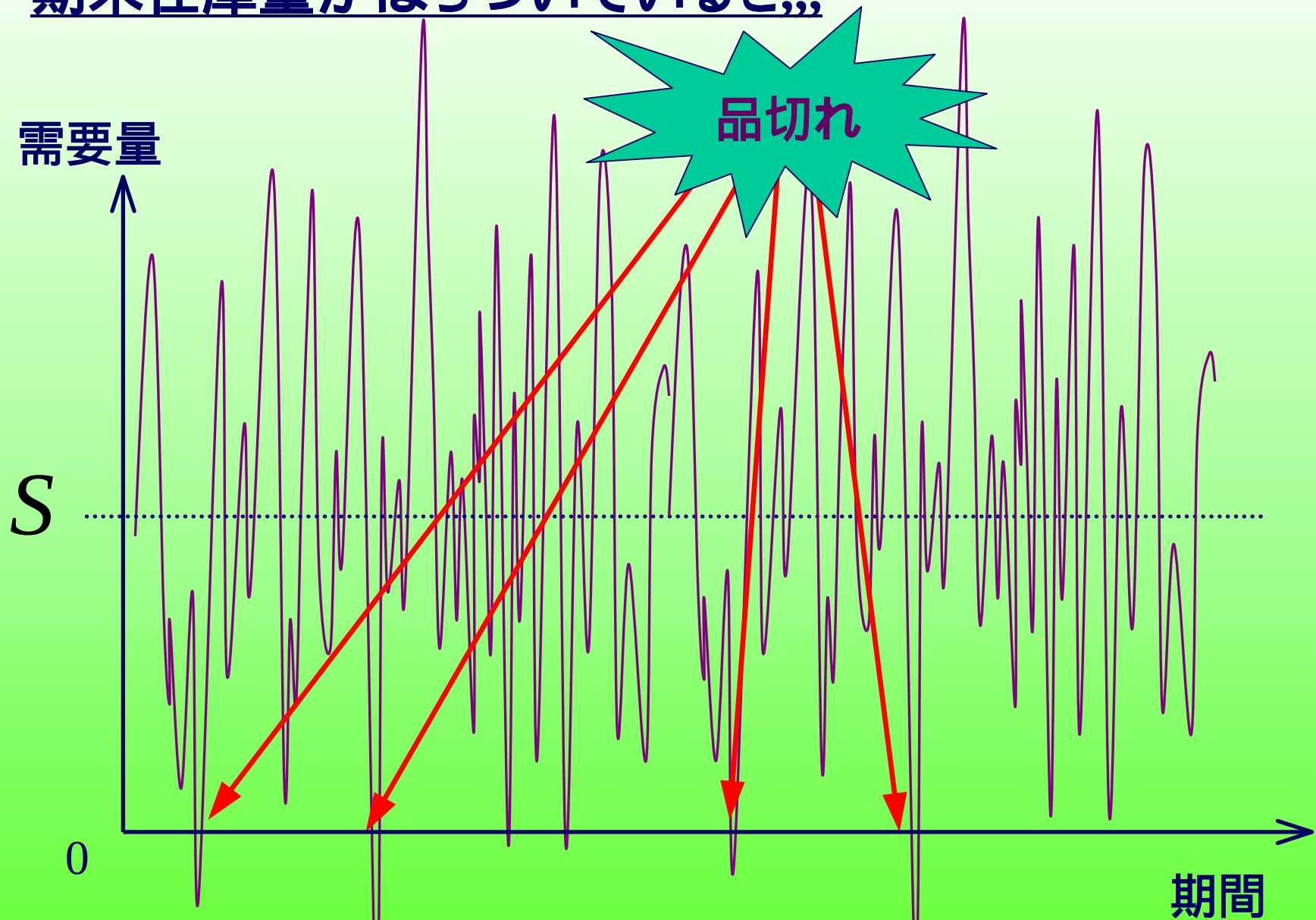
制御結果がどれだけ目標値Sの近くに集中しているか？



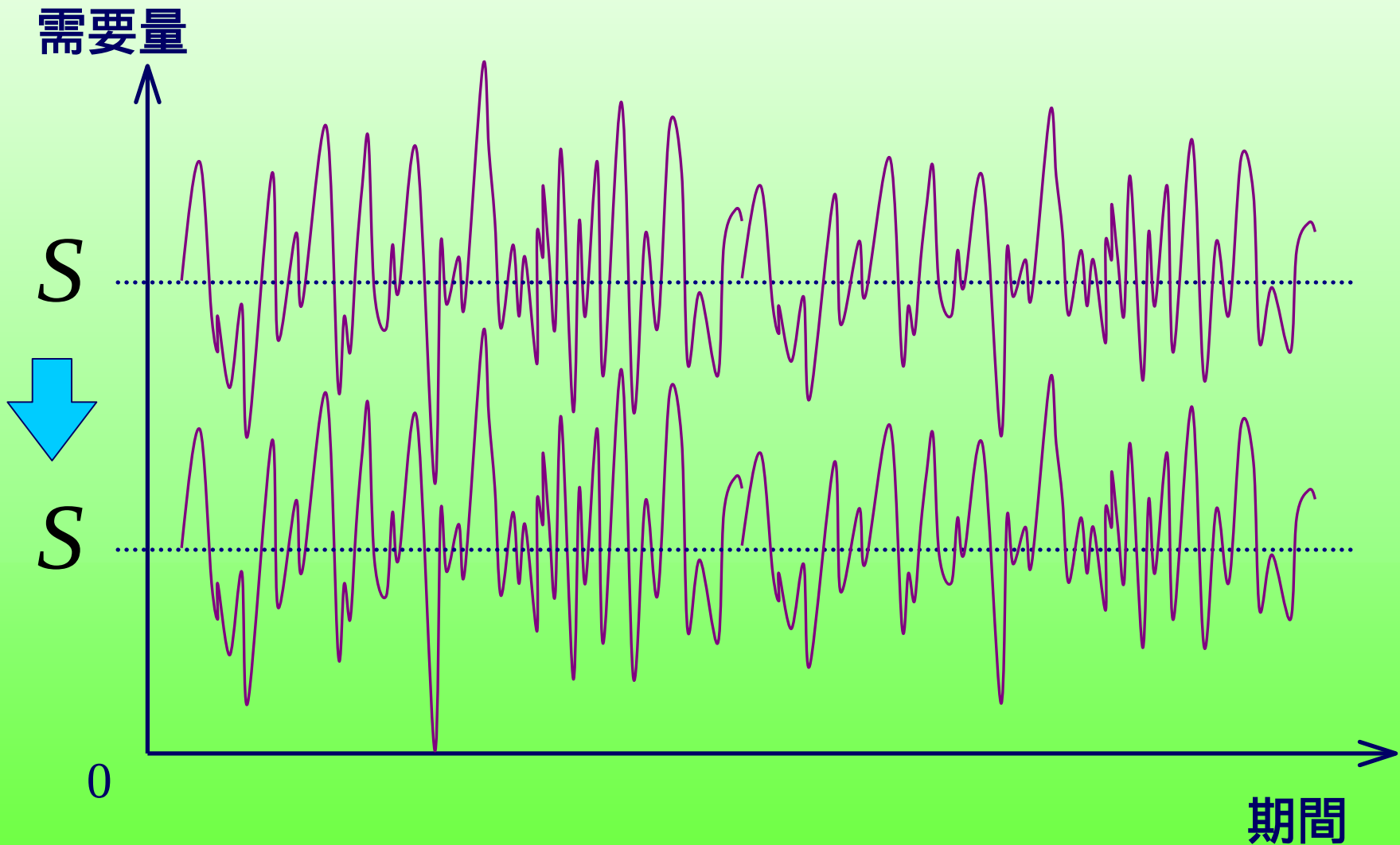
平均二乗誤差

$$V(I) = E[(I(t) - S)^2]$$

期末在庫量がばらついていると...



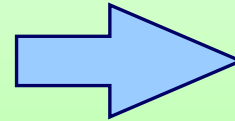
期末在庫量のばらつきが小さくなると,,,



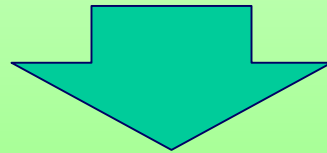
在庫の最適な制御

平均二乗誤差

$$V(I) = E[(I(t) - S)^2]$$



最小化！



最適発注量

需要の予測量

$$O(t) = \overset{\text{需要の予測量}}{D}(t+1) - I(t) + S$$

もう少し複雑な問題を考える

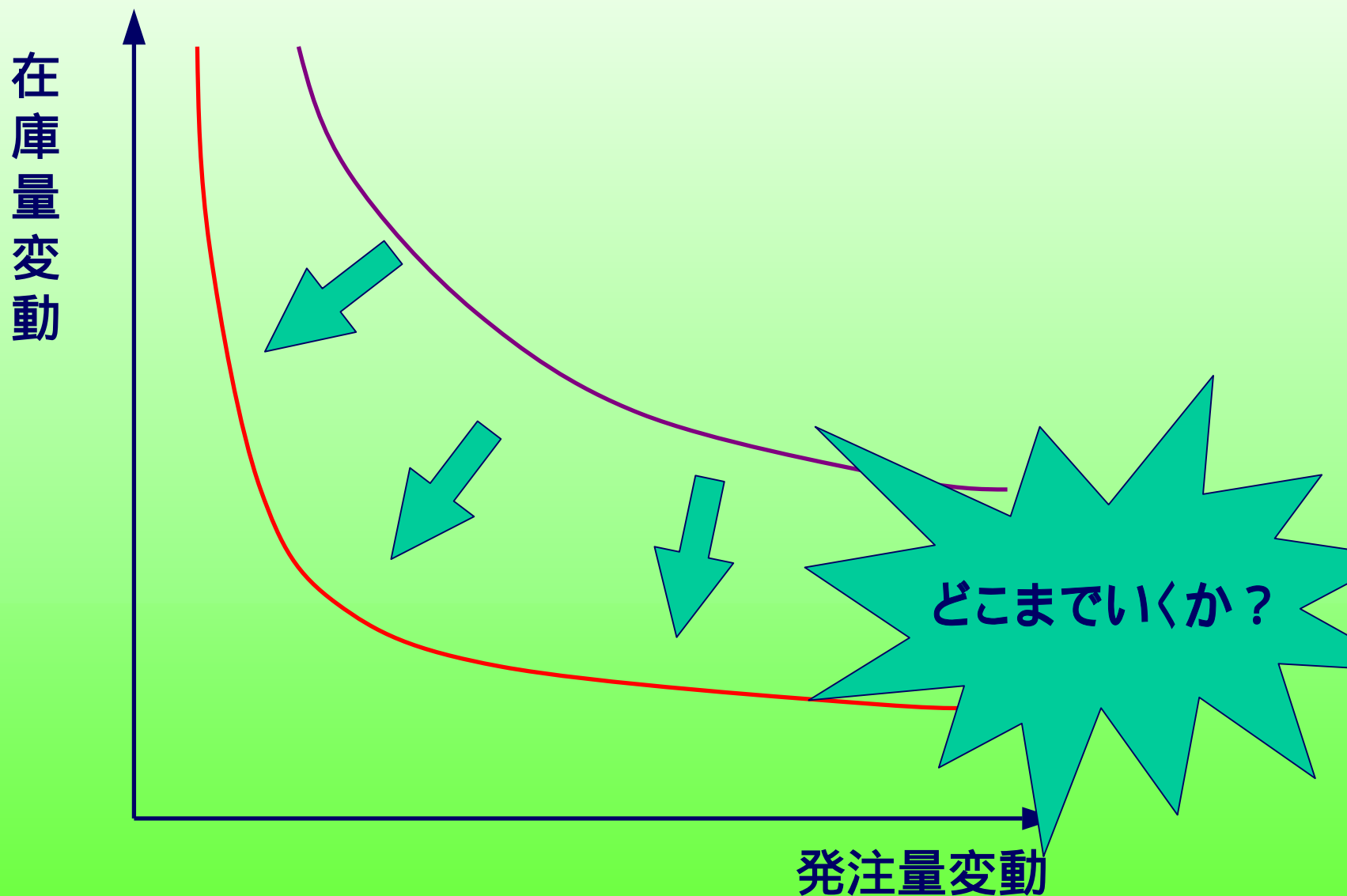
- 平均在庫量をできるだけ少なくしたい
- 発注量変動もできるだけ少なくして、発注を平滑化したい

在庫量変動

発注量変動



在庫量変動と発注量変動



評価関数

在庫量変動

$$V(I) = E[(I(t) - S)^2]$$

在庫量変動

$$V(O) = E[(O(t) - \mu)^2]$$

両変動の重み付け和

$$W = QV(I) + RV(O)$$

Q, R : 重み(係数)

色々な発注システム

在庫量変動最小発注

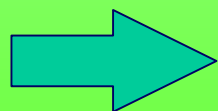
$$O(t) = \overset{\circ}{D}(t+1) - I(t) + S$$

γ 型発注システム

$$O(t) = \overset{\circ}{D}(t+1) - \gamma \{I(t) - S\}$$

G型発注システム

$$O(t) = \mu + G \{\overset{\circ}{D}(t+1) - I(t) - \mu + S\}$$



γ 、G を最適化

古典的制御

現代制御理論

システムの状態空間表現

$$z(t) = Fz(t-1) + Gy(t-1) + w(t)$$

↑
状態ベクトル

↑
制御入力
ベクトル

↑
白色雑音
ベクトル

評価関数

$$J_m = E \sum_{t=1}^m \left\{ z(t)^T Q z(t) + y(t-1)^T R y(t-1) \right\}$$

Q,R: 正定値ウエイトベクトル

解法の準備

[補題]

システムが

$$x = Fz + Gy + w$$

に従うものとする。ただし、 w は独立な確率変数である。
このとき、評価関数

$$J_1 = E \left\{ x^T Q x + y^T R y \right\}$$

を最小化する y は

$$y^* = - \left(G^T Q G + R \right)^{-1} G^T Q F z$$

で与えられる。

[証明]

評価関数を書き換えると

$$\begin{aligned} J_1 &= E \left\{ x^T Q x + y^T R y \right\} \\ &= \left\{ y + \left(G^T Q G + R \right)^{-1} G^T Q F z \right\}^T \left(G^T Q G + R \right) \\ &\quad \left\{ y + \left(G^T Q G + R \right)^{-1} G^T Q F z \right\} + (\text{定数}) \end{aligned}$$

前半の二次形式を最小化する y は

$$y = - \left(G^T Q G + R \right)^{-1} G^T Q F z$$

m期間の最適制御問題に拡張

[定理]

m期間の最適制御問題の最適制御入力 $y_m(0)$
及び、その時の評価関数の値 $f_m(z) = \min J_m$

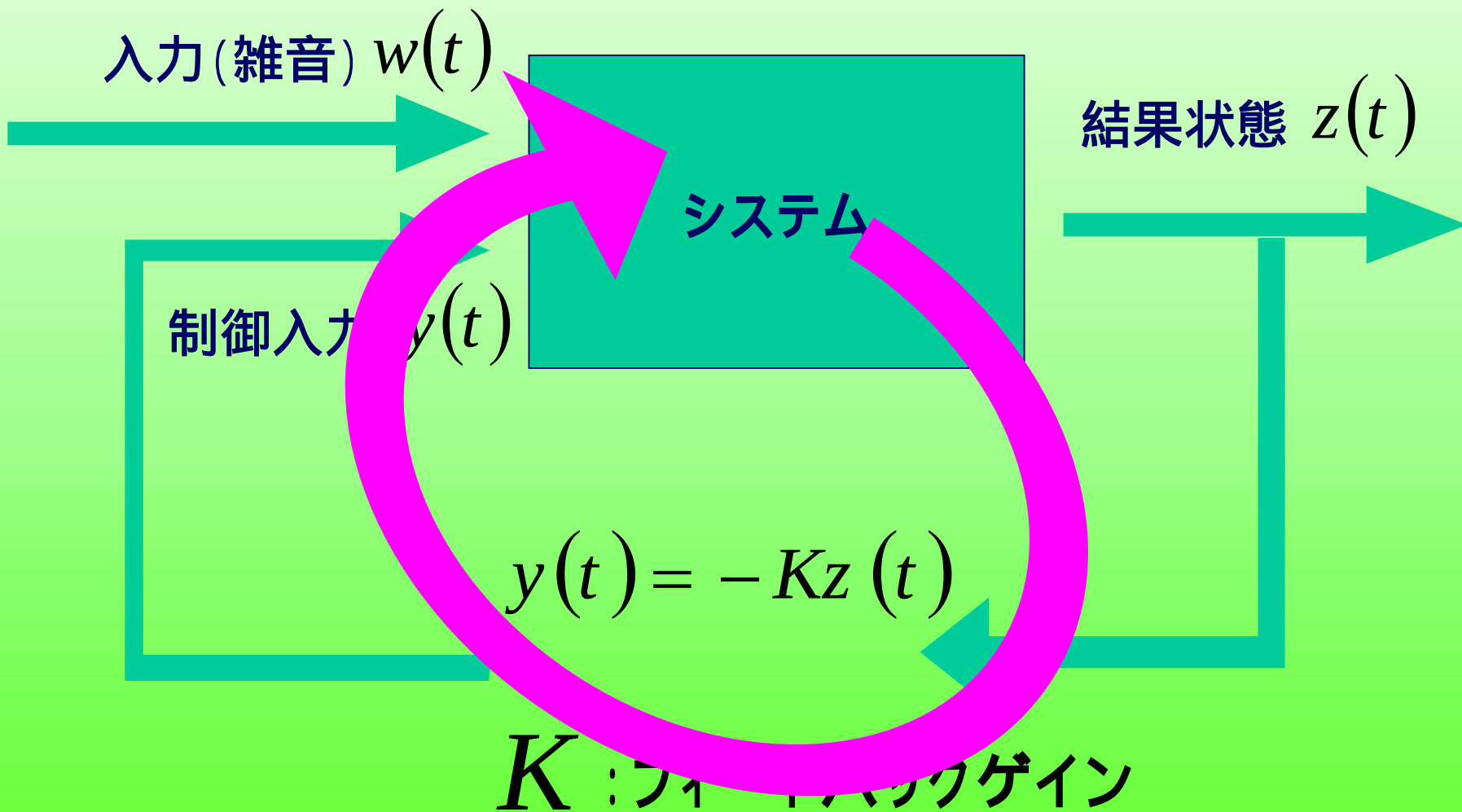
は、

$$y_m(0) = -\left(G^T S(m)G + R\right)^{-1} G^T S(m)Fz(0)$$

$$f_m(z) = -z(0)^T P(m)z(0)$$

$S(m)$, $P(m)$ は別途計算される行列

フィードバック制御



在庫問題に戻って...

[定理]

在庫モデル $I(t+1) = I(t) + O(t) - D(t+1)$

需要モデル $D(t) = \lambda \{D(t-1) - \mu\} + \varepsilon(t)$

において在庫量分散と発注量分散の重み付け和

$$W = QV(I) + RV(O)$$

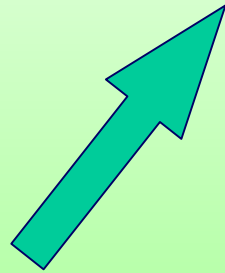
を最小化する最適発注式は

$$O(t) = \mu - F\{I(t) - S\} - K\{D(t) - \mu\}$$

で与えられる。

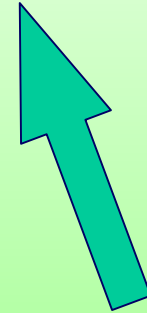
解釈

$$O(t) = \mu - F \{ I(t) - S \} - K \{ D(t) - \mu \}$$



在庫量の目標値とのずれ

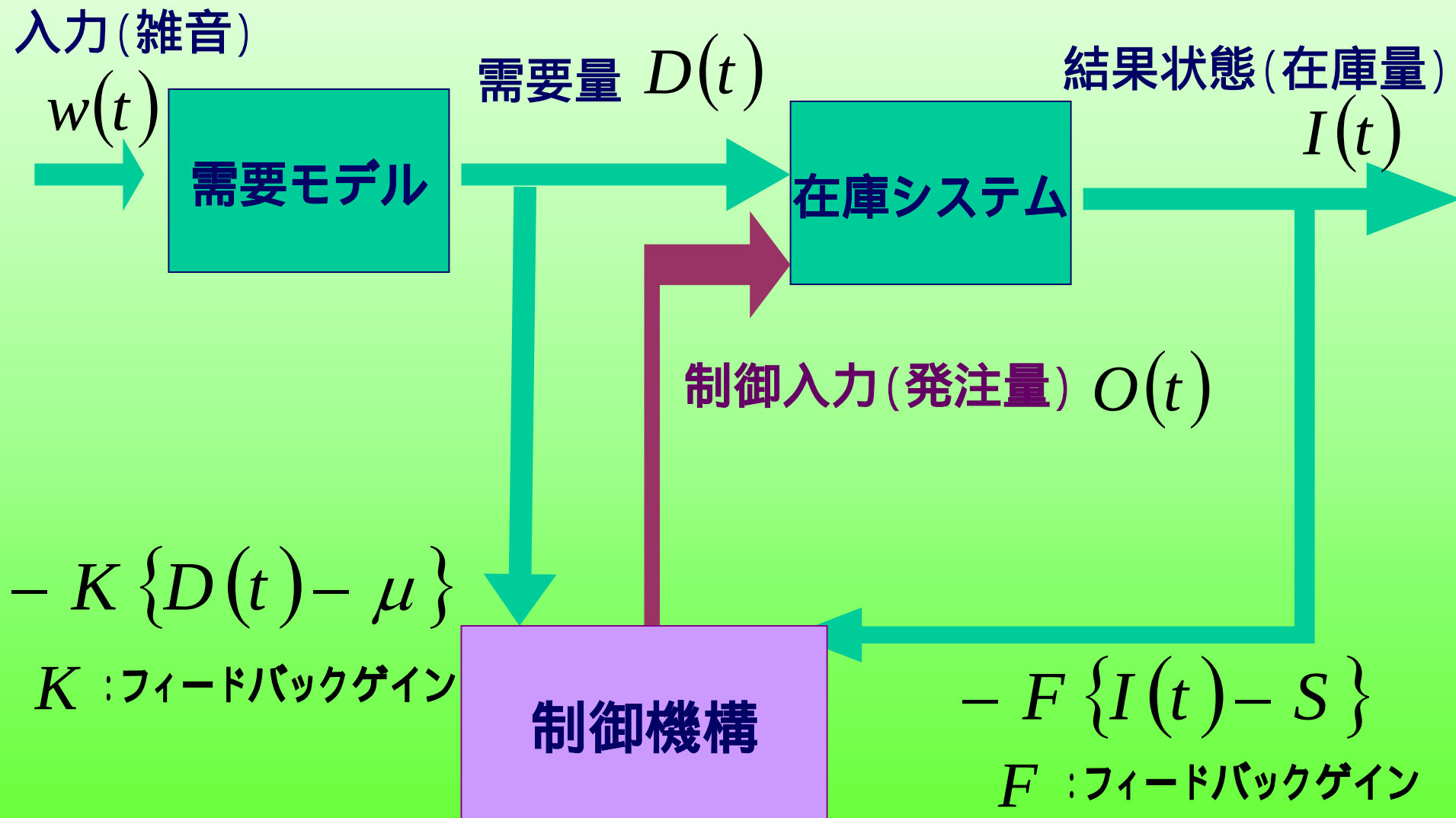
どれくらい在庫が多い
か、少ないか



需要量の期待値とのずれ

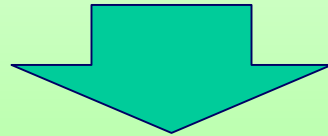
需要が売れる時期か、
売れない時期か

在庫管理システム



考察

- ・ 非常に単純化されたモデル上の話であるが、興味深い知見も与えてくれる



発注量をむやみに変動させず、
在庫を適切に管理するためには

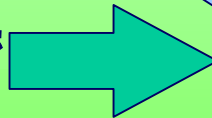
- ・ 現在の在庫量
- ・ 需要動向

に基づいて発注しなければならない

拡張の必要性

- 多段階工程、SCM
- リードタイムの考慮
-

世の中の管理、意思決定などは制御モデルとして解釈できることが多い



一つの考え方として
有用である

補足

